MATEMÁTICAS APLICADAS ÁS CIENCIAS SOCIAIS

O alumno debe resolver só un exercicio de cada un dos tres bloques temáticos.
Puntuación máxima de cada un dos exercicios: Álxebra 3 ptos; Análise 3,5 ptos; Estatística 3,5 ptos.

ÁLXEBRA

1. Un empresario fabrica dous productos *A* e *B*. A fabricación dun kilogramo de *A* necesita 4 horas de traballo e un gasto de 60 euros en material, obténdose un beneficio de 45 euros. A fabricación dun kilogramo de *B* necesita 8 horas de traballo e un gasto de 48 euros en material, obténdose un beneficio de 33 euros.

Cada semana o empresario dispón de 200 horas de traballo. Ademais, asinou un contrato que o obriga a fabricar un mínimo de 15 kg. de *A* e 10 kg. de *B*. Se non pode gastar máis de 1920 euros en material, ¿cantos kilogramos por semana debe fabricar de cada producto para obte-lo máximo beneficio posible?

2. Resolver matricialmente a ecuación $A^t X - B = 0$ sendo

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

e onde A^t denota a matriz trasposta de A.

ANÁLISE

l. Dada a función

$$f(x) = \begin{cases} -x + 1 & \text{si} \quad x \le 1 \\ -x^2 + 4x - 3 & \text{si} \quad 1 < x \le 3 \\ \dfrac{x-3}{x} & \text{si} \quad x > 3 \end{cases}$$

PRepresentala graficamente estudiando: puntos de corte, crecemento e decrecemento, concavidade e asíntotas.

2. a) Determina-la función *f(x)* se se sabe que pasa polo punto (0, 1) e que a súa derivada é $f'(x) = x^3 + 2x$.

b) Determina-lo punto da gráfica no que a recta tanxente ten pendente 0. ¿Que máis se pode afirmar dese punto? Xustifíquese a resposta.

ESTATÍSTICA

1. Considérese unha poboación na que se estudia unha característica X que segue unha distribución normal de media $\mu=12$ e varianza $\sigma^2=16$. Pídese: a) Probabilidade de que un elemento da poboación, elexido ó chou, teña a característica superior a 14. b) Considérase unha mostra aleatoria de tamaño n=9. ¿Cal é a probabilidade de que a media mostral $\overline{X}$ teña un valor superior a 14?

$$\overline{X} \in N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

2. a) A probabilidade de que deixe de fumar un paciente, que se someteu a un réxime médico rigoroso, é de 0´8. Se se elixen 100 pacientes, que se someteron a dito réxime, ¿cal é a probabilidade de que deixaran de fumar entre 74 e 85 pacientes, ámbolos dous incluidos?

b) Sexan A e B dous sucesos tales que P(A) = 0´6 e P(B) = 0´3. Se P(A/B) = 0´1 calcúlese $P(A \cup B)$ e $P(\overline{B}/A)$ sendo $\overline{B}$ o complementario do suceso B.

MATEMÁTICAS APLICADAS ÁS CIENCIAS SOCIAIS

O alumno debe resolver só un exercicio de cada un dos tres bloques temáticos.
Puntuación máxima de cada un dos exercicios: Álxebra 3 ptos; Análise 3,5 ptos; Estatística 3,5 ptos.

ÁLXEBRA

1. Na seguinte táboa indícase a audiencia prevista (en miles de espectadores) por tres cadeas de TV (A, B, C) nunha determinada semana e en cada un dos tres segmentos horarios (Mañá: M, Tarde: T e Noite: N)

	A	B	C
M	40	60	20
T	60	40	30
N	100	80	90

Sen embargo, como consecuencia da calidade dos programas emitidos, produciuse na audiencia prevista (e en tódolos segmentos horarios) unha reducción do 10% para a cadea A, unha reducción do 5% para a B e un aumento do 20% para a C.
a) Obte-la matriz que representa a nova audiencia das tres cadeas A, B e C, nos tres segmentos horarios M, N e T.
b) Sabendo que o beneficio que obtén cada cadea por espectador é de 3 euros pola mañá, 4 euros pola tarde e 6 euros pola noite, obter mediante cálculo matricial os beneficios para cada unha das tres cadeas.

2. Deséxase investir 3000 euros en dous tipos de accións A e B. O tipo A ten bastante risco, cun interés anual do 10% e o tipo B é bastante segura, cun interés anual do 7%. Decídese investir como máximo 1800 euros en A e como mínimo 600 euros en B e ademais, investir en A tanto ou máis que en B. ¿Cal debe se-la distribución do investimento para obte-lo máximo interés anual?

ANÁLISE

1. A producción y, en kg., dunha certa colleita agrícola, depende da cantidade de nitróxeno x, con que abonemos a terra (nas unidades apropiadas), segundo a función $y = \frac{1000\,x}{1 + x^2}$, sendo $x \geq 0$

a) Estudia-lo crecemento e decrecemento da función. Calcula-la producción máxima.

b) Se é rendible que a producción estea entre 400Kg. e 500Kg. (ámbolos dous incluídos), ¿que cantidades de nitróxeno necesitaríamos?

2. Determina-los parámetros a, b e c na función polinómica $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$, sabendo que ten un mínimo relativo no punto (3, 0) e que a área, $\int_0^3 f(x)dx$, limitada pola gráfica da función $f(x)$ e o eixe x é $\frac{27}{4}$

ESTATÍSTICA

1. Nunha cidade, o 80% da poboación adulta mira a televisión, o 30% le algún libro e o 25% mira a televisión e le algún libro. Pídese:
a) De entre os que len libros, ¿que porcentaxe mira a televisión?
b) Porcentaxe dos que non miran a televisión e sí len algún libro.
c) Porcentaxe dos que non fan ningunha das dúas cousas.

2. A) A cantidade de mineral, en toneladas, que produce semanalmente unha mina, é unha variable aleatoria que segue unha distribución normal de media 10 Tm. e desviación típica 4 Tm.
a) Calcula-la probabilidade de que a producción semanal fora superior a 12 Tm.
b) Elíxense 10 semanas ó chou ¿cal é a probabilidade de que en 3 ou máis semanas a producción de dito mineral fora superior a 12 Tm.?

CONVOCATORIA DE XUÑO

O alumno debe resolver só un exercicio de cada bloque temático. No caso de responde-los dous, será calificado coa nota do exercicio que figura co número 1 do bloque.

ÁLXEBRA *(A puntuación máxima de cada exercicio é 3 puntos).*

Exercicio 1.

Chamémoslle "x" ós Kg. de *A* e "y" ós Kg. de *B* que fabrica o empresario por semana.

Inecuacións: $x \geq 15$; $y \geq 10$; $4x + 8y \leq 200$; $60x + 48y \leq 1920$. (**0´25 puntos** por cada unha delas). *Vértices da rexión factible*: (15, 10), (24, 10), (20, 15), (15, 35/2).(**0´25 puntos** por cada un deles). *Identificación da rexión factible*: debuxa-las catro rectas e a rexión do plano limitada por elas e polos catro vértices: (**0´5 puntos**). *Solución óptima*: A función beneficio $z = 45x + 33y$ maximízase no vértice (24, 10). Polo tanto o empresario debe fabricar por semana 24 Kg. do producto *A* e 10 Kg. do producto *B*. Beneficio máximo: 1410 euros. (**0´5 puntos**).

Exercicio 2.

Despexa-la X: $X = (A^t)^{-1}.B$. (**0´5 puntos**). *Cálculo da inversa de* A^t:

$$(A^t)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$ (**1´5 puntos**).

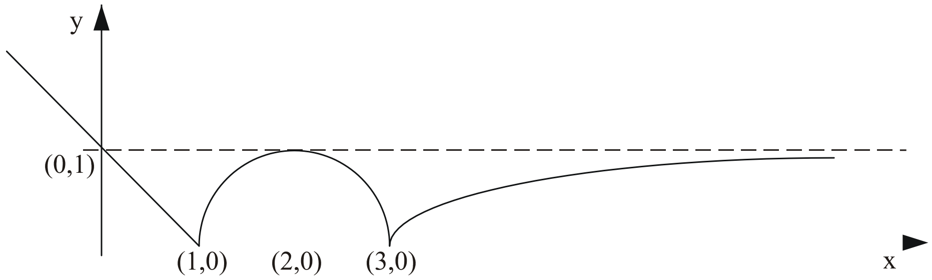
Obter:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$ (**1 punto**).

ANÁLISE *(A puntuación máxima de cada exercicio é 3´5 puntos).*

Exercicio 1.

Puntos de corte: Co eixo *y* (0, 1). Co eixo *x* (1, 0) e (3, 0). (**0´25 puntos** por cada eixo). *Crecemento e decrecemento*: Nos intervalos $(-\infty, 1)$ e (2, 3) a función é decrecente e nos intervalos (1, 2) e $(3, +\infty)$ é crecente. (**0´25 puntos** polo estudio de cada un dos intervalos). *Concavidade*: É cóncava hacia abaixo nos intervalos (1, 3) e $(3, +\infty)$. (**0´25 puntos** polo estudio da concavidade en cada intervalo). *Asíntotas*: Verticais: non ten. Horizontais: A recta "y = 1" é asíntota horizontal pola dereita (**0´5 puntos**). *Representación gráfica*: (**1 punto**)



Exercicio 2.

a) *Determinar f(x)* = $a x^4 + b x^2 + c$. Por pasar polo punto (0,1) dedúcese que c = 1. Facendo a primeira derivada e igualando a $x^3 + 2x$ obtense. a = 1/4 e b = 1. (**0´75 puntos** pola obtención de a, **0´75** por b e **0´5** por c).

b) Igualando a primeira derivada a 0 obtense o punto da gráfica (0,1). (**1 punto**). *Xustificar* que se trata dun mínimo porque a segunda derivada é positiva nese punto (**0´5 puntos**).

ESTATÍSTICA *(A puntuación máxima de cada exercicio é 3´5 puntos).*

Exercicio 1.

a) *Plantexamento*: $P(X > 14)$. (**0´25 puntos**). *Tipifica-la* variable $\overline{X} \in N(\mu = 12, \sigma = 4)$ e chegar a $P(X > 14) = P(Z > 0´5)$ (**0´75 puntos**). *Transformar* $P(Z > 0´5) = 1 - P(Z \leq 0´5)$ (**0´25 puntos**) e busca-lo valor na táboa, obtendo ó final a solución 0´3085, (**0´25 puntos**).

b) *Plantexamento*: P(>14). (**0´5 puntos**). Tipifica-la variable $\overline{X} \in N\left(\mu = 12, \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{4}{3}\right)$, e chegar a $P(\overline{X} > 14) = P(Z > 1´5)$ (**1 punto**). *Transformar* $P(Z > 1´5) = 1 - P(Z \leq 1´5)$ (**0´25 puntos**) e busca-lo valor na táboa, obtendo ó final o resultado 0´0668, (**0´25 puntos**).

Exercicio 2.

a) ***Recoñece-la binomial***: "X = número de pacientes que deixan de fumar, nunha mostra de n = 100 pacientes", $X \in B(n = 100, p = 0´8)$, (0´5 puntos). *Utiliza-lo teorema de Moivre-Laplace* e pasar a $X \in N(\mu = np = 80, \sigma = \sqrt{np(1-p)} = 4)$, (**0´5 puntos**). *Tipificación* da variable e corrección de medio punto:

$P(74 \leq X \leq 85) = P(73'5 < X < 85'5) = P(-1'625 < Z < 1'375)$, (**0´5 puntos**). *Transforma-la probabilidade* para poder usa-las táboas e chegar a solución, 0´8621, (**0´5 puntos**).

b) Por calcular $P(A \cap B) = 0'03$, (**0´25 puntos**), e por $P(A \cup B) = 0'87$, (**0´5 puntos**). Pola expresión de $P(\overline{B} / A)$ (**0´25 puntos**), e por calcula-la probabilidade pedida, obtendo a solución, 0´95, (**0´5 puntos**).

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

O alumno debe resolver só un exercicio de cada bloque temático. No caso de responde-los dous, será calificado coa nota do exercicio que figura co número 1 do bloque.

ÁLXEBRA *(A puntuación máxima de cada exercicio é 3 puntos).*

Exercicio 1.

a) *Obtención da matriz da nova audiencia*: (**0´5 puntos** pola matriz de reducción e aumento das audiencias das cadeas A, B e C e **1 punto** polo resto)

$$\begin{array}{c} \\ M \\ T \\ N \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{pmatrix} 40 & 60 & 20 \\ 60 & 40 & 30 \\ 100 & 80 & 90 \end{pmatrix} \end{array} + \begin{pmatrix} -4 & -3 & 4 \\ -6 & -2 & 6 \\ -10 & -4 & 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36 & 57 & 24 \\ 54 & 38 & 36 \\ 90 & 76 & 108 \end{pmatrix}$$

b) *Obtención da matriz dos beneficios*: (**1´5 puntos**. Sen cálculo matricial só **0´5 puntos**)

$$(3 \;\; 4 \;\; 6)\begin{pmatrix} 36 & 57 & 24 \\ 54 & 38 & 36 \\ 90 & 76 & 108 \end{pmatrix} = (864 \;\; 779 \;\; 864).$$

Resultado: Beneficio das cadeas A e C: 864.000 euros, beneficio da cadea B: 779.000 euros.

Exercicio 2.

Sexan "x" e "y" os euros investidos nas accións dos tipos *A* e *B*, respectivamente. *Inecuacións*: $x + y \leq 3000$; $x \leq 1800$; $y \geq 600$; $x \geq y$. (**0´25 puntos** por cada unha delas). *Vértices da rexión factible*: (600, 600), (1800, 600), (1800, 1200), (1500, 1500). (**0´25 puntos** por cada un deles). *Identificación da rexión factible*: debuxa-las catro rectas e a rexión do plano limitada por elas e polos catro vértices: (**0´5 puntos**). *Solución óptima*: A función obxectivo $z = 0'1x + 0'07y$ maximízase no vértice (1800, 1200), polo tanto hai que investir 1800 euros en accións do tipo A e 1200 euros en accións do tipo B, (**0´5 puntos**).

ANÁLISE *(A puntuación máxima de cada exercicio é 3´5 puntos).*

Exercicio 1.

a) Cálculo da derivada: $f(x) = \dfrac{1000 - 1000\,x^2}{(1 + x^2)^2}$ (**1 punto**). *Crecemento e decrecemento*: No intervalo (0, 1) a función é crecente. No $(1, +\infty)$ é decrecente. (**0´25 puntos** polo estudio de cada un dos intervalos). *Producción máxima*: Para x =1, a producción y = 500 Kg. é máxima. (**0´5 puntos**).

b) *Plantexa-las desigualdades*: $400 \leq \dfrac{1000x}{1 + x^2} \leq 500$, (**0´5 puntos**). *Cálculo dos valores de x*: $1/2 \leq x \leq 2$, (**1 punto**).

Exercicio 2.

Plantexa-lo sistema de tres ecuacións:

- Por pasa-la función $f(x) = a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x$ polo punto (3, 0): $27a + 9b + 3c = 0$, (**0´5 puntos**).
- Por ter un mínimo relativo no punto (3, 0): $27a + 6b + c = 0$, (**1 punto**).
- Por verificarse que: $\int_0^3 (a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x)\,dx = 27/4$: $\dfrac{81}{4}a + 9b + \dfrac{9}{2}c + \dfrac{27}{4}$, (1 punto).

Resolución do sistema: Obter: a=1, b=-6, c=9, (**1 punto**).

ESTATÍSTICA *(A puntuación máxima de cada exercicio é 3´5 puntos).*

Exercicio 1.

Sexan os sucesos "T: un adulto mira a televisión" e "L: un adulto le algún libro",

a) $P(T/L) = 0'833$. Un 83´3% dos que len libros, mira a televisión, (**1 punto**).

b) $P(\overline{T} \cap L) = 0'05$. O 5% non miran a televisión e si len algún libro, (**1 punto**).

c) $P(\overline{T} \cap \overline{L}) = 0'15$. O 15% non fan ningunha das dúas cousas, (**1´5 puntos**).

Exercicio 2.

a) *Plantexamento*: "X =Tm. de mineral producido semanalmente por unha mina", $X \in N(\mu=10, \sigma=4)$ e plantexa-la probabilidade pedida $P(X>12)$, (**0´5 puntos**). *Tipificar*: $P(X>12) = P(Z>0'5)$, (**0´5 puntos)**. *Transformar* $P(Z>0'5) = 1- P(Z\leq 0'5)$ e busca-lo valor na táboa, obtendo ó final a solución 0´3085, (**0´5 puntos**).

b) *Recoñece-la binomial*: "Y = número de semanas nas que a producción de dito mineral é superior a 12 Tm., nunha mostra de n = 10 semanas", $X \in B(n=10, p = P(X>12) = 0'3)$, cos parámetros correspondentes, (**1 punto**). *Plantexa-la* probabilidade pedida $P(Y\geq 3)$, (**0´5 puntos**). *Transformar* $P(Y\geq 3) = 1- P(Y\leq 2)$ e busca-los valores na táboa, obtendo ó final a solución 0´6172, (**0´5 puntos**).