O exame consta de **4 preguntas de resposta obrigatoria**: a primeira sen apartados optativos e as tres seguintes con posibilidade de elección entre apartados. Deben xustificarse todas as respostas.

PREGUNTA 1. ESTATÍSTICA E PROBABILIDADE. (2 puntos)

CONTEXTO
Renfe opera un servicio Alvia entre Santiago de Compostela e Barcelona-Sants. Os datos históricos mostran que, en condicións operativas habituais, o tempo de viaxe segue unha distribución normal cunha media de 765 minutos e unha desviación típica de 18 minutos.

Con todo, durante os meses de inverno é frecuente que se produzan incidencias meteorolóxicas que obrigan a reducir a velocidade en certos tramos da ruta. Isto ocorre aproximadamente o 30 % dos días da temporada. Cando se activa o protocolo por incidencia, a distribución do tempo de viaxe segue a ser normal, pero pasa a ter unha media de 810 minutos e unha desviación típica de 40 minutos.

A compañía ferroviaria define que existe un "retraso significativo" cando o tempo de viaxe supera os 780 minutos nun día sen incidencias, ou os 840 minutos nun día con incidencia meteorolóxica declarada.

Responda estes dous apartados: 1.1. e 1.2.
(Será preciso usar algún ou algúns dos seguintes valores, aínda que non todos (enténdase que Z segue unha distribución $N(0,1)$): $\boldsymbol{P(Z \leq 0.3)} = 0.6179$, $\boldsymbol{P(Z \leq 0.75)} = 0.7734$, $\boldsymbol{P(Z \leq 0.83)} = 0.7967$, $\boldsymbol{P(Z \leq 1.125)} = 0.8697$, $\boldsymbol{P(Z \leq 4.16)} = 1$.)

1.1. Polo contexto, sábese que $P(R|\bar{I}) = P(X > 780)$ e que $P(R|I) = P(Y > 840)$. Explique o significado dos sucesos I e R e das variables aleatorias X e Y. Logo, determine a probabilidade de que, seleccionando ao azar un día da temporada invernal, este tren Alvia experimente un retraso significativo segundo a definición da compañía.

1.2. Calcule a probabilidade de que, nun día con incidencia meteorolóxica activa, o tren complete a súa viaxe nun tempo inferior a 765 minutos, que é o tempo medio en condicións habituais.

PREGUNTA 2. ÁLXEBRA. (2 puntos)

Responda un destes dous apartados: 2.1. ou 2.2.

2.1. Considérese a igualdade matricial $A(X - I)B = C$, onde X é cadrada e I é a matriz identidade.

2.1.1. Despexe X supoñendo que A e B son cadradas e invertibles.
2.1.2. Que dimensións teñen X e B se A e C son matrices 1×2? Obteña X, simétrica e tal que os elementos da súa diagonal sumen 0, se $A = (1 \quad 1)$, $B = I$ e $C = (0 \quad 0)$.

2.2. Discuta, segundo os valores do parámetro m, o sistema

$$\begin{cases} (m-4)x & & + & 5z & = & 9, \\ & (m-1)y & + & 6z & = & m+8, \\ (m-4)x & + (m-1)y & + & 7z & = & m+9. \end{cases}$$

PREGUNTA 3. ANÁLISE. (4 puntos)

Responda dous destes tres apartados: 3.1., 3.2., 3.3.

3.1. Para cada un dos seguintes casos, debuxe, cando sexa posible, a gráfica dunha función que cumpra as propiedades indicadas:

a) Continua pero non derivable en $x = 0$.
b) Continua en $[a, b]$, con $f(a)f(b) < 0$, e cuxa gráfica corte ao eixe x en máis dun punto do intervalo (a, b).
c) Continua en $[a, b]$, derivable en (a, b), con $f(a)f(b) < 0$, $f' > 0$ en (a, b), e cuxa gráfica corte ao eixe x en máis dun punto do intervalo (a, b).
d) Dúas veces derivable en $\mathbb{R}$, con $f'' > 0$ en $\mathbb{R}$ e monótona en $\mathbb{R}$.

3.2. Calcule os seguintes límites:

a) $\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x}$.
b) $\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{\ln x}$.
c) $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{\sin x}$.
d) $\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x}\ln x$.

3.3. Calcule o valor que ten que tomar o parámetro positivo a para que a área da rexión encerrada pola gráfica da función $f(x) = ax^2 - 2ax$ e o eixe x sexa igual a 10 unidades de superficie. Faga un debuxo da rexión.

PREGUNTA 4. XEOMETRÍA. (2 puntos)

Responda un destes dous apartados: 4.1. ou 4.2.

4.1. Sexa r a recta que pasa pola orixe e por P', sendo P' o punto simétrico de $P(1,0,1)$ con respecto ao punto $Q(0,1,0)$. Pídese:

4.1.1. Obteña P' e as ecuacións paramétricas de r.
4.1.2. Determine a ecuación implícita do plano que pasa pola orixe e é perpendicular a r.

4.2. Considérense os puntos $P(1,0,1)$, $Q(0,1,0)$ e $R(1,1,1)$.

4.2.1. Demostre que P, Q e R non están aliñados e obteña a ecuación implícita do plano π que pasa por eles.
4.2.2. Calcule o valor ou valores de a que fan que a distancia do punto $S(a,0,0)$ a ese plano π sexa igual a $\sqrt{2}$ unidades de lonxitude.

El examen consta de **4 preguntas de respuesta obligatoria**: la primera sin apartados optativos y las tres siguientes con posibilidad de elección entre apartados. Deben justificarse todas las respuestas.

PREGUNTA 1. ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD. (2 puntos)

CONTEXTO

Renfe opera un servicio Alvia entre Santiago de Compostela y Barcelona-Sants. Los datos históricos muestran que, en condiciones operativas habituales, el tiempo de viaje sigue una distribución normal con una media de 765 minutos y una desviación típica de 18 minutos.

Sin embargo, durante los meses de invierno es frecuente que se produzcan incidencias meteorológicas que obligan a reducir la velocidad en ciertos tramos de la ruta. Esto ocurre aproximadamente el 30 % de los días de la temporada. Cuando se activa el protocolo por incidencia, la distribución del tiempo de viaje sigue siendo normal, pero pasa a tener una media de 810 minutos y una desviación típica de 40 minutos.

La compañía ferroviaria define que existe un "retraso significativo" cuando el tiempo de viaje supera los 780 minutos en un día sin incidencias, o los 840 minutos en un día con incidencia meteorológica declarada.

Responda estos dos apartados: 1.1. y 1.2.

(Será preciso usar alguno o algunos de los siguientes valores, aunque no todos (entiéndase que Z sigue una distribución $N(0,1)$): $\boldsymbol{P(Z \leq 0.3)} = 0.6179$, $\boldsymbol{P(Z \leq 0.75)} = 0.7734$, $\boldsymbol{P(Z \leq 0.83)} = 0.7967$, $\boldsymbol{P(Z \leq 1.125)} = 0.8697$, $\boldsymbol{P(Z \leq 4.16)} = 1$.)

1.1. Por el contexto, se sabe que $P(R|\bar{I}) = P(X > 780)$ y que $P(R|I) = P(Y > 840)$. Explique el significado de los sucesos I y R y de las variables aleatorias X e Y. Luego, determine la probabilidad de que, seleccionando al azar un día de la temporada invernal, este tren Alvia experimente un retraso significativo según la definición de la compañía.

1.2. Calcule la probabilidad de que, en un día con incidencia meteorológica activa, el tren complete su viaje en un tiempo inferior a 765 minutos, que es el tiempo medio en condiciones habituales.

PREGUNTA 2. ÁLGEBRA. (2 puntos)

Responda uno de estos dos apartados: 2.1. o 2.2.

2.1. Considérese la igualdad matricial $A(X - I)B = C$, donde X es cuadrada e I es la matriz identidad.

2.1.1. Despeje X suponiendo que A y B son cuadradas e invertibles.

2.1.2. ¿Qué dimensiones tienen X y B si A y C son matrices 1×2? Obtenga X, simétrica y tal que los elementos de su diagonal sumen 0, si $A = (1 \quad 1)$, $B = I$ y $C = (0 \quad 0)$.

2.2. Discuta, según los valores del parámetro m, el sistema

$$\begin{cases} (m-4)x & & + & 5z & = & 9, \\ & (m-1)y & + & 6z & = & m+8, \\ (m-4)x & + (m-1)y & + & 7z & = & m+9. \end{cases}$$

PREGUNTA 3. ANÁLISIS. (4 puntos)

Responda dos de estos tres apartados: 3.1., 3.2., 3.3.

3.1. Para cada uno de los siguientes casos, dibuje, cuando sea posible, la gráfica de una función que cumpla las propiedades indicadas:

a) Continua pero no derivable en $x = 0$.
b) Continua en $[a, b]$, con $f(a)f(b) < 0$, y cuya gráfica corte al eje x en más de un punto del intervalo (a, b).
c) Continua en $[a, b]$, derivable en (a, b), con $f(a)f(b) < 0$, $f' > 0$ en (a, b), y cuya gráfica corte al eje x en más de un punto del intervalo (a, b).
d) Dos veces derivable en $\mathbb{R}$, con $f'' > 0$ en $\mathbb{R}$ y monótona en $\mathbb{R}$.

3.2. Calcule los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x}$.
b) $\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{\ln x}$.
c) $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{\sin x}$.
d) $\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x}\ln x$.

3.3. Calcule el valor que tiene que tomar el parámetro positivo a para que el área de la región encerrada por la gráfica de la función $f(x) = ax^2 - 2ax$ y el eje x sea igual a 10 unidades de superficie. Haga un dibujo de la región.

PREGUNTA 4. GEOMETRÍA. (2 puntos)

Responda uno de estos dos apartados: 4.1. o 4.2.

4.1. Sea r la recta que pasa por el origen y por P', siendo P' el punto simétrico de $P(1,0,1)$ con respecto al punto $Q(0,1,0)$. Se pide:

4.1.1. Obtenga P' y las ecuaciones paramétricas de r.
4.1.2. Determine la ecuación implícita del plano que pasa por el origen y es perpendicular a r.

4.2. Considérense los puntos $P(1,0,1)$, $Q(0,1,0)$ y $R(1,1,1)$.

4.2.1. Demuestre que P, Q y R no están alineados y obtenga la ecuación implícita del plano π que pasa por ellos.
4.2.2. Calcule el valor o valores de a que hacen que la distancia del punto $S(a, 0,0)$ a ese plano π sea igual a $\sqrt{2}$ unidades de longitud.

PREGUNTA 1

1.1. I é o suceso «prodúcense incidencias meteorolóxicas», R o suceso «hai un retraso significativo», mentres que $X \sim N(765,18)$ é a variable aleatoria que representa o tempo de viaxe nun día sen incidencias e $Y \sim N(810,40)$ é a variable aleatoria que representa o tempo de viaxe nun día con incidencias. Pídese $P(R)$.

En virtude do teorema da probabilidade total, sábese que

$$P(R) = P(R|I)P(I) + P(R|\bar{I})P(\bar{I}) = 0.3\,P(R|I) + 0.7\,P(R|\bar{I}),$$

porque $P(I) = 0.3$.

$$P(R|I) = P(Y > 840) = P\left(Z_Y > \frac{840-810}{40}\right) = P\left(Z_Y > \frac{30}{40}\right) = P\left(Z_Y > \frac{3}{4}\right) = P(Z_Y > 0.75)$$
$$= 1 - P(Z_Y \leq 0.75) = 1 - 0.7734 = 0.2266.$$

$$P(R|\bar{I}) = P(X > 780) = P\left(Z_X > \frac{780-765}{18}\right) = P\left(Z_X > \frac{15}{18}\right) = P\left(Z_X > \frac{5}{6}\right) = P(Z_X > 0.83)$$
$$= 1 - P(Z_X \leq 0.83) = 1 - 0.7967 = 0.2033.$$

Conclúese que

$$\boldsymbol{P(R)} = 0.3 \times 0.2266 + 0.7 \times 0.2033 = 0.06798 + 0.14231 = 0.21029 \approx \mathbf{0.2103}.$$

1.2.

$$\boldsymbol{P(Y < 765)} = P\left(Z_Y < \frac{765-810}{40}\right) = P\left(Z_Y < -\frac{45}{40}\right) = P\left(Z_Y < -\frac{9}{8}\right) = P(Z_Y < -1.125)$$
$$= P(Z_Y > 1.125) = 1 - P(Z_Y \leq 1.125) = 1 - 0.8697 = \mathbf{0.1303}.$$

PREGUNTA 2

2.1. $A(X-I)B=C$, con X cadrada.

2.1.1. Se A e B son cadradas e invertibles, entón

$$X-I=A^{-1}CB^{-1},$$

de onde

$$\boldsymbol{X=I+A^{-1}CB^{-1}}.$$

2.1.2.

$$\underbrace{A}_{1\times2}\ \underbrace{(X-I)}_{2\times2}\ \underbrace{B}_{2\times2}=\underbrace{C}_{1\times2}.$$

Para que se poda facer o produto $A(X-I)$, a matriz $X-I$, e polo tanto X, ten que ter dúas filas. Como é cadrada, $\boldsymbol{X}$ **ten que ser de dimensión** $\mathbf{2\times2}$.

Isto obriga a que B teña dúas filas e, para que C teña dúas columnas, B ten que ter dúas columnas. É dicir, $\boldsymbol{B}$ **tamén ten que ser de dimensión** $\mathbf{2\times2}$.

Pasamos á última parte desde exercicio:

$$\begin{pmatrix}1 & 1\end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix}x & y\\ y & -x\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x-1 & y\\ y & -x-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\end{pmatrix},$$

é dicir,

$$\begin{Bmatrix}x-1+y=0\\ y-x-1=0\end{Bmatrix}\Leftrightarrow\begin{Bmatrix}x+y=1\\ -x+y=1\end{Bmatrix}\Leftrightarrow\begin{Bmatrix}x+y=1\\ 2y=2\end{Bmatrix}\Leftrightarrow\begin{Bmatrix}y=1\\ x=1-y=0\end{Bmatrix}.$$

Logo a matriz pedida é

$$\boldsymbol{X=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}}.$$

2.2.

Polo método de Gauss, podemos reducir o sistema dado a outro equivalente con matriz triangular, cuxa discusión é sinxela:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}m-4 & 0 & 5 & 9\\ 0 & m-1 & 6 & m+8\\ m-4 & m-1 & 7 & m+9\end{array}\right)\overset{F_3-F_1}{\longrightarrow}\left(\begin{array}{ccc|c}m-4 & 0 & 5 & 9\\ 0 & m-1 & 6 & m+8\\ 0 & m-1 & 2 & m\end{array}\right)\overset{F_3-F_2}{\longrightarrow}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}m-4 & 0 & 5 & 9\\ 0 & m-1 & 6 & m+8\\ 0 & 0 & -4 & -8\end{array}\right).$$

Sistema triangular equivalente:

$$\begin{cases} (m-4)x & & + & 5z & = & 9, \\ & (m-1)y & + & 6z & = & m+8, \\ & & & z & = & 2. \end{cases}$$

Discusión:

- Se $m \in \mathbb{R} \setminus \{1,4\}$, o sistema é compatible determinado, xa que a súa única solución é

$$z = 2, \qquad y = \frac{m+8-6z}{m-1} = \frac{m-4}{m-1}, \qquad x = \frac{9-5z}{m-4} = \frac{-1}{m-4}.$$

- Se $m = 1$, o sistema é

$$\begin{cases} -3x + 5z = 9, \\ 6z = 9, \\ z = 2, \end{cases}$$

que é incompatible porque a segunda e a terceira ecuación non se poden cumprir á vez.

- Se $m = 4$, temos

$$\begin{cases} 5z = 9, \\ 3y + 6z = 12, \\ z = 2, \end{cases}$$

que é incompatible porque a primeira e a terceira ecuación non se poden cumprir á vez.

2.2. SOLUCIÓN ALTERNATIVA

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} m-4 & 0 & 5 & 9 \\ 0 & m-1 & 6 & m+8 \\ m-4 & m-1 & 7 & m+9 \end{array}\right), \qquad A = \begin{pmatrix} m-4 & 0 & 5 \\ 0 & m-1 & 6 \\ m-4 & m-1 & 7 \end{pmatrix}.$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} m-4 & 0 & 5 \\ 0 & m-1 & 6 \\ m-4 & m-1 & 7 \end{vmatrix} = (m-4)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & m-1 & 6 \\ 1 & m-1 & 7 \end{vmatrix} = (m-4)(m-1)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 7 \end{vmatrix}$$

$$= (m-4)(m-1)(7-5-6) = -4(m-4)(m-1).$$

Polo tanto, $\operatorname{rank}(A) < 3$ se $m \in \{1,4\}$, porque $\det(A) = 0$,

$\operatorname{rank}(A) = 3$ se $m \in \mathbb{R} \setminus \{1,4\}$, porque $\det(A) \neq 0$.

Discusión:

- Se $m \in \mathbb{R} \setminus \{1,4\}$, o sistema é compatible determinado, xa que $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(A^*) = 3 =$ n.º de incógnitas.

- Se $m = 1$,

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 0 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & 6 & 9 \\ -3 & 0 & 7 & 10 \end{array}\right), \qquad A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \\ -3 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

Como

$$\begin{vmatrix} -3 & 5 & 9 \\ 0 & 6 & 9 \\ -3 & 7 & 10 \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} 1 & 5 & 9 \\ 0 & 6 & 9 \\ 1 & 7 & 10 \end{vmatrix} = -3(60 + 45 - 54 - 63) = -3(-12) = 36 \neq 0,$$

tense que $\operatorname{rank}(A^*) = 3 \neq \operatorname{rank}(A)$. Logo neste caso o sistema é incompatible.

- Se $m = 4$,

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 5 & 9 \\ 0 & 3 & 6 & 12 \\ 0 & 3 & 7 & 13 \end{array}\right), \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 3 & 7 \end{pmatrix}.$$

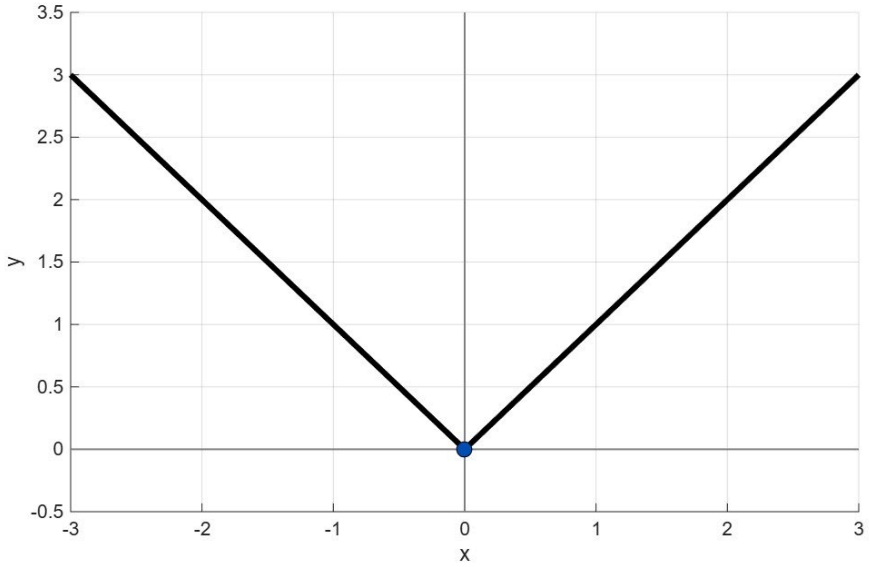
Como $\begin{vmatrix} 0 & 5 & 9 \\ 3 & 6 & 12 \\ 3 & 7 & 13 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 0 & 5 & 9 \\ 1 & 6 & 12 \\ 1 & 7 & 13 \end{vmatrix} = 3(60 + 63 - 54 - 65) = 3 \times 4 = 12 \neq 0,$

tense que $\operatorname{rank}(A^*) = 3 \neq \operatorname{rank}(A)$. Logo neste caso o sistema tamén é incompatible.

PREGUNTA 3

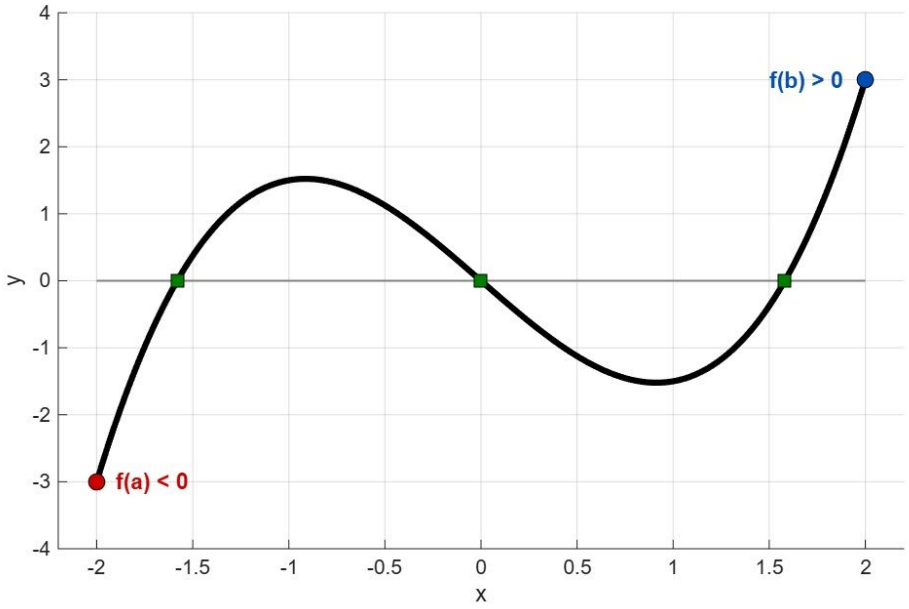
3.1.

3.1.a) Función continua pero non derivable en $x = 0$:



É a gráfica de $f(x) = |x|$. É continua pero non derivable en $x = 0$.

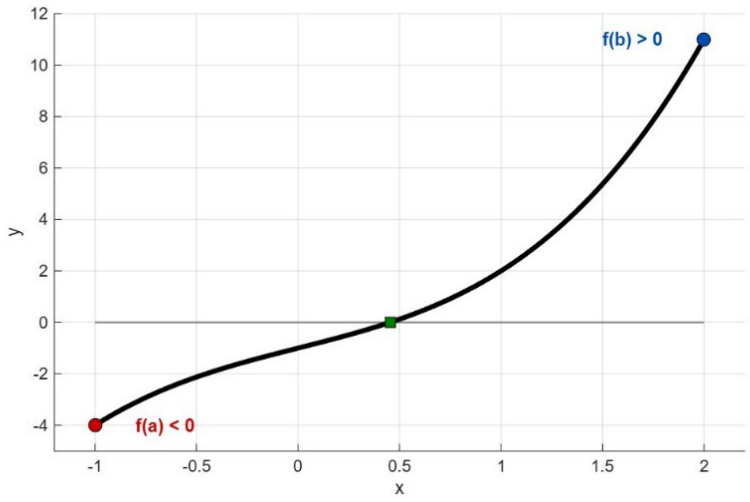
3.1.b) Función continua en $[a, b]$, con $f(a)f(b) < 0$, e cuxa gráfica corta ao eixe x en máis dun punto do intervalo (a, b).



Neste caso a gráfica corta ao eixe x en tres puntos do intervalo $(a, b) = (-2,2)$.

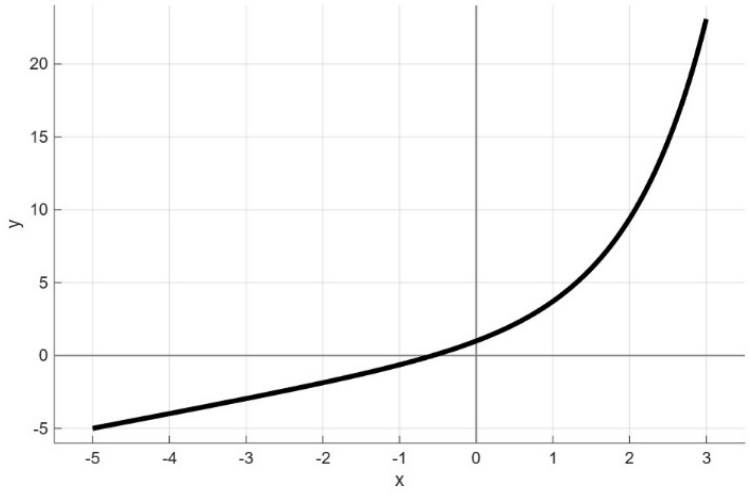
3.1.c) Función continua en $[a, b]$, derivable en (a, b), con $f(a)f(b) < 0$, $f' > 0$ en (a, b), e cuxa gráfica corta ao eixe x en máis dun punto do intervalo (a, b).

Non existe unha función que cumpra todas esas condicións, porque, ao ser estritamente crecente ($f' > 0$), a súa gráfica só pode cortar ao eixe x nun punto. Se se tivese $f(c_1) = f(c_2) = 0$ para certos c_1 e c_2 distintos de (a, b), entón tería que haber algún punto entre eles onde f' fose 0 (polo teorema de Rolle).

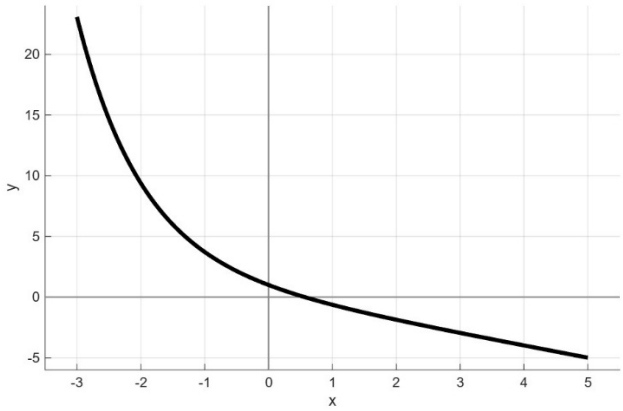


No debuxo, $a = -1$ e $b = 2$.

3.1.d) Función dúas veces derivable en $\mathbb{R}$, con $f'' > 0$ en $\mathbb{R}$ e monótona en $\mathbb{R}$.
Vale, por exemplo:



A función ten que ser convexa, xa que $f'' > 0$, pero non ten por que ser crecente. Por exemplo, tamén vale a seguinte:



3.2.

3.2.a)

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x} = \frac{0}{1} = 0.$$

3.2.b)

$$\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{\ln x}.$$

A substitución directa leva a unha indeterminación de tipo $0/0$, polo que aplicaremos a regra de L`Hôpital.

Posto que

$$\lim_{x\to 1} \frac{1}{1/x} = \lim_{x\to 1} x = 1,$$

conclúese que

$$\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{\ln x} = 1.$$

3.2.c)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{\cos x}\frac{1}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x} = 1.$$

Ou ben, empregando a regra de L´Hôpital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{1+\tan^2 x}{\cos x} = 1.$$

3.2.d)

$$\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x}\ln x.$$

Aquí preséntase unha indeterminación de tipo $0 \times (-\infty)$. Ao reescribir o límite como

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x^{-1/2}}$$

a indeterminación pasa a ser de tipo $-\infty/\infty$ e pódese aplicar a regra de L'Hôpital:

Posto que

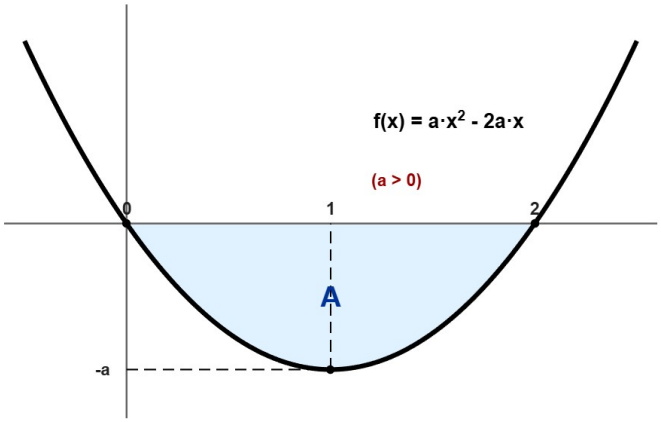
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^{-1}}{(-1/2)x^{-3/2}} = -2\lim_{x\to 0^+} x^{-1+3/2} = -2\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x} = 0,$$

conclúese que

$$\boldsymbol{\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x}\ln x = 0}.$$

3.3. $f(x) = ax^2 - 2ax = ax(x-2),\ f'(x) = 2ax - 2a = 2a(x-1), f''(x) = 2a > 0.$ A gráfica de f é, por tanto, unha parábola convexa con vértice en $x = 1$.

Pódese representar a rexión de interese (ver debuxo) usando a información anterior xunto con $f(1) = a - 2a = -a < 0,\ f(0) = 0 = f(2)$.



$$A = -\int_0^2 (ax^2 - 2ax)\,dx$$

$$= \int_0^2 (2ax - ax^2)\,dx$$

$$= a\int_0^2 (2x - x^2)\,dx = a\left[x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_0^2 = a\left(4 - \frac{8}{3}\right) = a\frac{12-8}{3} = \frac{4a}{3}.$$

Agora calcúlase o valor pedido:

$$\frac{4a}{3} = 10 \Leftrightarrow 4a = 30 \Leftrightarrow \boldsymbol{a = \frac{30}{4} = 7.5}.$$

PREGUNTA 4

4.1.



A recta r pasa por $O(0,0,0)$ e por $P'(x,y,z)$.

4.1.1.

$$\left.\begin{cases}\dfrac{x+1}{2}=0\Longrightarrow x=-1,\\ \dfrac{y+0}{2}=1\Longrightarrow y=2,\\ \dfrac{z+1}{2}=0\Longrightarrow z=-1.\end{cases}\right\}\Rightarrow \boldsymbol{P'(-1,2,-1)}.$$

$\vec{v}_r=\overrightarrow{P'O}=(-1,2,-1)$ é vector director de r, conque

$$\boldsymbol{r}:\begin{cases}\boldsymbol{x=-\lambda},\\ \boldsymbol{y=2\lambda},\\ \boldsymbol{z=-\lambda},\end{cases}\qquad \boldsymbol{\lambda}\in\mathbb{R}$$

son ecuacións paramétricas de r.

4.1.2. Como o plano pasa pola orixe e $\vec{v}_r=(-1,2,-1)$ é normal ao plano, a súa ecuación implícita é

$$\boldsymbol{-x+2y-z=0}.$$

4.2. Considéranse os puntos $P(1,0,1)$, $Q(0,1,0)$ e $R(1,1,1)$.

4.2.1. P, Q e R non están aliñados porque $\overrightarrow{PQ}=(-1,1,-1)$ non é proporcional a $\overrightarrow{PR}=(0,1,0)$.

Tendo en conta que $Q(0,1,0)\in\pi$, que $\overrightarrow{PQ}$ e $\overrightarrow{PR}$ son xeradores do plano e que

$$\begin{vmatrix} x & y-1 & z\\ -1 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 0\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} x & z\\ -1 & -1\end{vmatrix}=-(-x+z)=x-z,$$

conclúese que a ecuación implícita pedida é $\boldsymbol{\pi: x-z=0}$. (Poderiamos evitar o razoamento empregado para probar que os puntos non están aliñados dicindo que **non están aliñados porque o determinante anterior non é identicamente nulo**.)

4.2.2. A distancia entre un plano π: $Ax + By + Cz + D = 0$ e un punto $P(x_0, y_0, z_0)$ vén dada pola fórmula

$$\mathrm{d}(P, \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Neste caso,

$$\mathrm{d}(S, \pi) = \frac{|a|}{\sqrt{2}}.$$

Por último,

$$\frac{|a|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \Leftrightarrow |a| = 2 \Leftrightarrow \boldsymbol{a} \in \{-\mathbf{2}, \mathbf{2}\}.$$

NOTA FINAL: *as solucións que se presentan aquí son só propostas. É habitual que os problemas admitan varias formas de resolución, todas elas correctas e, polo tanto, igualmente válidas.*

CIUG COMISIÓN INTERUNIVERSITARIA DE GALICIA

PAU
Convocatoria extraordinaria 2026
MATEMÁTICAS II

CÓDIGO 20

O exame consta de **4 preguntas de resposta obrigatoria**: a primeira sen apartados optativos e as tres seguintes con posibilidade de elección entre apartados. Deben xustificarse todas as respostas.

PREGUNTA 1. ESTATÍSTICA E PROBABILIDADE. (2 puntos)

CONTEXTO
Os índices de lectura tanto de libros coma de cómics están aumentando nos últimos anos, con especial incidencia entre os adolescentes. Segundo un informe sobre hábitos de lectura, máis do 60 % da poboación leu un libro ou un cómic nos últimos tres meses.

Para promover o hábito da lectura, dentro da política cultural do concello, os responsables municipais dunha cidade galega están a organizar unha feira de cómics para o vindeiro mes de setembro. Segundo os datos proporcionados polos organizadores doutras feiras similares, o tempo que unha persoa vai pasar en dita feira pode considerarse que segue unha distribución normal de media igual a 50 minutos e desviación típica igual a 19.5 minutos.

Responda estes dous apartados: 1.1. e 1.2.
(Será preciso usar algún ou algúns dos seguintes valores, aínda que non todos (enténdase que Z segue unha distribución $N(0,1)$): $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{Z} \leq \mathbf{0.1}) = 0.5398$, $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{Z} \leq \mathbf{0.26}) = 0.6026$, $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{Z} \leq \mathbf{0.51}) = 0.6950$, $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{Z} \leq \mathbf{1.03}) = 0.8485$, $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{Z} \leq \mathbf{1.28}) = 0.8997$, $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{Z} \leq \mathbf{2.33}) = 0.9901$.)

1.1. Calcule a probabilidade de que un asistente pase entre 45 e 70 minutos na feira.

1.2. Se unha persoa entrou á feira ás 17:00, calcule a probabilidade de que saia antes das 18:00 sabendo que ás 17:45 aínda estaba na feira.

PREGUNTA 2. ÁLXEBRA. (2 puntos)

Responda un destes dous apartados: 2.1. ou 2.2.

2.1. Dadas as matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, pídese responder as seguintes cuestións:

2.1.1. Calcule as matrices $X = AA^T$ e $Y = A^TA$, sendo A^T a matriz trasposta de A. Son X ou Y invertibles? Razoe a resposta e calcule as inversas en caso de que sexa posible.

2.1.2. Calcule as matrices da forma $M = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ tales que $BM = M$.

2.2. Discuta, segundo os valores do parámetro m, o sistema

$$\begin{cases} 2x + (2m-2)y + (m+6)z = 9, \\ x + (m-2)y + 3z = 2, \\ 2y + (2m+2)z = m-5. \end{cases}$$

PREGUNTA 3. ANÁLISE. (4 puntos)

Responda dous destes tres apartados: 3.1., 3.2., 3.3.

3.1. Dado o polinomio $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, calcule os coeficientes a, b, c e d se se sabe que p ten un extremo relativo en $(1, -6)$ e que a ecuación da recta tanxente á gráfica de p en $x = -1$ é $y = 4x + 2$.

3.2. Debuxe a gráfica dunha función $f: \mathbb{R} \setminus \{2\} \to \mathbb{R}$ que teña as seguintes propiedades:

- f, f' e f'' teñen o mesmo signo no intervalo $(-1,2)$ e
- $\lim_{x \to 2^+} f(x) = -\infty$.

Logo, dea explicacións relacionando o debuxo coa monotonía, a convexidade ou concavidade e o concepto de asíntota.

3.3. Dadas as funcións $f(x) = \cos x$ e $g(x) = \frac{4}{\pi^2}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2$, debuxe a rexión encerrada polas súas gráficas e calcule a súa área.

PREGUNTA 4. XEOMETRÍA. (2 puntos)

Responda un destes dous apartados: 4.1. ou 4.2.

4.1. Considere a recta $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{3}$.

4.1.1. Calcule a ecuación implícita ou xeral do plano π que contén á recta r e ao punto $Q(2, -1, 1)$.
4.1.2. Comprobe que a recta r é paralela ao plano $\pi^*: x + y - z - 1 = 0$. Calcule a distancia de r a π^*.

4.2. Considere o punto $P(3, 0, -1)$.

4.2.1. Calcule o punto P' simétrico de P con respecto ao punto $Q(2, -1, 2)$.
4.2.2. Calcule o punto P'' simétrico de P con respecto ao plano $\pi: x + 2y + z - 8 = 0$.

El examen consta de **4 preguntas de respuesta obligatoria**: la primera sin apartados optativos y las tres siguientes con posibilidad de elección entre apartados. Deben justificarse todas las respuestas.

PREGUNTA 1. ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD. (2 puntos)

CONTEXTO

Los índices de lectura tanto de libros como de cómics están aumentando en los últimos años, con especial incidencia entre los adolescentes. Según un informe sobre hábitos de lectura, más del 60 % de la población leyó un libro o un cómic en los últimos tres meses.

Para promover el hábito de la lectura, dentro de la política cultural del ayuntamiento, los responsables municipales de una ciudad gallega están organizando una feria de cómics para el próximo mes de septiembre. Según los datos proporcionados por los organizadores de otras ferias similares, el tiempo que una persona va a pasar en dicha feria puede considerarse que sigue una distribución normal de media igual a 50 minutos y desviación típica igual a 19.5 minutos.

Responda estos dos apartados: 1.1. y 1.2.

(Será preciso usar alguno o algunos de los siguientes valores, aunque no todos (entiéndase que Z sigue una distribución $N(0,1)$): $\boldsymbol{P(Z \leq 0.1)} = 0.5398$, $\boldsymbol{P(Z \leq 0.26)} = 0.6026$, $\boldsymbol{P(Z \leq 0.51)} = 0.6950$, $\boldsymbol{P(Z \leq 1.03)} = 0.8485$, $\boldsymbol{P(Z \leq 1.28)} = 0.8997$, $\boldsymbol{P(Z \leq 2.33)} = 0.9901$.)

1.1. Calcule la probabilidad de que un asistente pase entre 45 y 70 minutos en la feria.

1.2. Si una persona entró a la feria a las 17:00, calcule la probabilidad de que salga antes de las 18:00 sabiendo que a las 17:45 aún estaba en la feria.

PREGUNTA 2. ÁLGEBRA. (2 puntos)

Responda uno de estos dos apartados: 2.1. o 2.2.

2.1. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, se pide responder las siguientes cuestiones:

2.1.1. Calcule las matrices $X = AA^T$ e $Y = A^TA$, siendo A^T la matriz traspuesta de A. ¿Son X o Y invertibles? Razone la respuesta y calcule las inversas en caso de que sea posible.

2.1.2. Calcule las matrices de la forma $M = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ tales que $BM = M$.

2.2. Discuta, según los valores del parámetro m, el sistema

$$\begin{cases} 2x + (2m-2)y + (m+6)z = 9, \\ x + (m-2)y + 3z = 2, \\ 2y + (2m+2)z = m-5. \end{cases}$$

PREGUNTA 3. ANÁLISIS. (4 puntos)

Responda dos de estos tres apartados: 3.1., 3.2., 3.3.

3.1. Dado el polinomio $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, calcule los coeficientes a, b, c y d si se sabe que p tiene un extremo relativo en $(1, -6)$ y que la ecuación de la recta tangente a la gráfica de p en $x = -1$ es $y = 4x + 2$.

3.2. Dibuje la gráfica de una función $f: \mathbb{R} \setminus \{2\} \to \mathbb{R}$ que tenga las siguientes propiedades:

- f, f' y f'' tienen el mismo signo en el intervalo $(-1,2)$ y
- $\lim_{x \to 2^+} f(x) = -\infty$.

Luego, dé explicaciones relacionando el dibujo con la monotonía, la convexidad o concavidad y el concepto de asíntota.

3.3. Dadas las funciones $f(x) = \cos x$ y $g(x) = \frac{4}{\pi^2}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2$, dibuje la región encerrada por sus gráficas y calcule su área.

PREGUNTA 4. GEOMETRÍA. (2 puntos)

Responda uno de estos dos apartados: 4.1. o 4.2.

4.1. Considere la recta $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{3}$.

4.1.1. Calcule la ecuación implícita o general del plano π que contiene a la recta r y al punto $Q(2, -1, 1)$.
4.1.2. Compruebe que la recta r es paralela al plano $\pi^*: x + y - z - 1 = 0$. Calcule la distancia de r a π^*.

4.2. Considere el punto $P(3, 0, -1)$.

4.2.1. Calcule el punto P' simétrico de P con respecto al punto $Q(2, -1, 2)$.
4.2.2. Calcule el punto P'' simétrico de P con respecto al plano $\pi: x + 2y + z - 8 = 0$.

PREGUNTA 1

Sexa $X \sim N(50,19.5)$ a variable aleatoria que representa o tempo, en minutos, que unha persoa pasa na feira, e sexa

$$Z = \frac{X - 50}{19.5}$$

a variable tipificada, de xeito que $Z \sim N(0,1)$.

1.1.

$$\boldsymbol{P(45 \leq X \leq 70)} = P\left(\frac{-5}{19.5} \leq Z \leq \frac{20}{19.5}\right) = P(-0.26 \leq Z \leq 1.03)$$
$$= P(Z \leq 1.03) - P(Z < -0.26) = P(Z \leq 1.03) - 1 + P(Z \leq 0.26)$$
$$= 0.8485 - 1 + 0.6026 = \boldsymbol{0.4511}.$$

1.2. Chamemos A ao suceso «estar na feira menos de 60 minutos» e B ao suceso «estar na feira polo menos de 45 minutos». Pídese $P(A|B)$.

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

- $P(B) = P(X \geq 45) = P\left(Z \geq \frac{-5}{19.5}\right) = P(Z \geq -0.26) = P(Z \leq 0.26) = 0.6026.$
- $P(A \cap B) = P(45 \leq X < 60) = P\left(\frac{-5}{19.5} \leq Z < \frac{10}{19.5}\right) = P(-0.26 \leq Z < 0.51) = P(Z < 0.51) - P(Z < -0.26) = P(Z < 0.51) - 1 + P(Z \leq 0.26) = 0.6950 - 1 + 0.6026 = 0.2976.$

Polo tanto, a probabilidade pedida é

$$\boldsymbol{P(A|B)} = \frac{0.2976}{0.6026} = \boldsymbol{0.4939}.$$

PREGUNTA 2

2.1. Téñense

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2.1.1.

$$\boldsymbol{X} = AA^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{4} \end{pmatrix}.$$

$$\boldsymbol{Y} = A^TA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{4} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}.$$

$\det X = 8 \neq 0 \Longrightarrow \boldsymbol{X}$ **é invertible**.

$\det Y = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 4 - 4 = 0 \Longrightarrow \boldsymbol{Y}$ **non é invertible**. (Ou ben, $\det Y = 0$ porque Y ten dúas filas iguais.)

A inversa de X é

$$\boldsymbol{X^{-1}} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^T = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1/2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1/4} \end{pmatrix}.$$

2.1.2. $M = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

$$BM = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c \\ b \\ a+c \end{pmatrix} = M = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} a+c=a \\ b=b \\ a+c=c \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} c=0 \\ b \in \mathbb{R} \text{ calquera} \\ a=0 \end{Bmatrix}.$$

É dicir,

$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \boldsymbol{b} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \textbf{ con } \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}.$$

2.2. Polo método de Gauss, podemos reducir o sistema dado a outro equivalente con matriz triangular, cuxa discusión é sinxela:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2m-2 & m+6 & 9 \\ 1 & m-2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 2m+2 & m-5 \end{array}\right) \overset{F_1 \leftrightarrow F_2}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & m-2 & 3 & 2 \\ 2 & 2m-2 & m+6 & 9 \\ 0 & 2 & 2m+2 & m-5 \end{array}\right) \overset{F_2 - 2F_1}{\longrightarrow}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & m-2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & m & 5 \\ 0 & 2 & 2m+2 & m-5 \end{array}\right) \overset{F_3 - F_2}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & m-2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & m & 5 \\ 0 & 0 & m+2 & m-10 \end{array}\right).$$

Sistema triangular equivalente:

$$\begin{cases} x & + & (m-2)y & + & 3z & = & 2, \\ & & 2y & + & mz & = & 5, \\ & & & & (m+2)z & = & m-10. \end{cases}$$

Discusión:

- Se $m \neq -2$, o sistema é compatible determinado, xa que a súa única solución é

$$z = \frac{m-10}{m+2}, \qquad y = \frac{5-mz}{2}, \qquad x = 2-(m-2)y-3z.$$

- Se $m = -2$, temos

$$\begin{cases} x - 4y + 3z = 2, \\ 2y - 2z = 5, \\ 0 = -12, \end{cases}$$

que é claramente incompatible.

2.2. SOLUCIÓN ALTERNATIVA

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2m-2 & m+6 & 9 \\ 1 & m-2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 2m+2 & m-5 \end{array}\right), \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & 2m-2 & m+6 \\ 1 & m-2 & 3 \\ 0 & 2 & 2m+2 \end{pmatrix}.$$

Como $\begin{vmatrix} 1 & m-2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$, $2 \leq \operatorname{rank}(A) \leq \operatorname{rank}(A^*) \leq 3$ e $[\operatorname{rank}(A) = 2 \Leftrightarrow \det(A) = 0]$. Isto é certo para calquera valor de m.

$$\begin{aligned} \det(A) &= -2\begin{vmatrix} 2 & m+6 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + (2m+2)\begin{vmatrix} 2 & 2m-2 \\ 1 & m-2 \end{vmatrix} \\ &= -2(6-m-6) + (2m+2)(2m-4-2m+2) = 2m-4m-4 = -2m-4 \\ &= 0 \Leftrightarrow m = -2. \end{aligned}$$

Polo tanto, o sistema é compatible determinado se $m \neq -2$.

Se $m = -2$, entón $\operatorname{rank}(A) = 2$ e

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -6 & 4 & 9 \\ 1 & -4 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & -7 \end{array}\right).$$

Posto que

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 9 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & -7 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -7 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 4 & 9 \\ -2 & -7 \end{vmatrix} = 2(-21+4) - (-28+18) = -34+10 = -24 \neq 0,$$

$\operatorname{rank}(A^*) = 3 \neq \operatorname{rank}(A) = 2$, e polo tanto o sistema é incompatible se $m = -2$.

PREGUNTA 3

3.1. $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, co cal $p'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$. Das igualdades $\boldsymbol{p'(1) = 0}$ e $\boldsymbol{p(1) = -6}$, que se cumpren porque p ten un extremo relativo en $(1, -6)$, sácanse as dúas ecuacións seguintes:

$$3a + 2b + c = 0, \qquad (1)$$

$$a + b + c + d = -6, \qquad (2)$$

A pendente da recta $y = 4x + 2$ é 4, así que $\boldsymbol{p'(-1) = 4}$, é dicir,

$$3a - 2b + c = 4. \qquad (3)$$

Ademais, $y(-1) = -4 + 2 = \boldsymbol{-2 = p(-1)}$, de onde

$$-a + b - c + d = -2. \qquad (4)$$

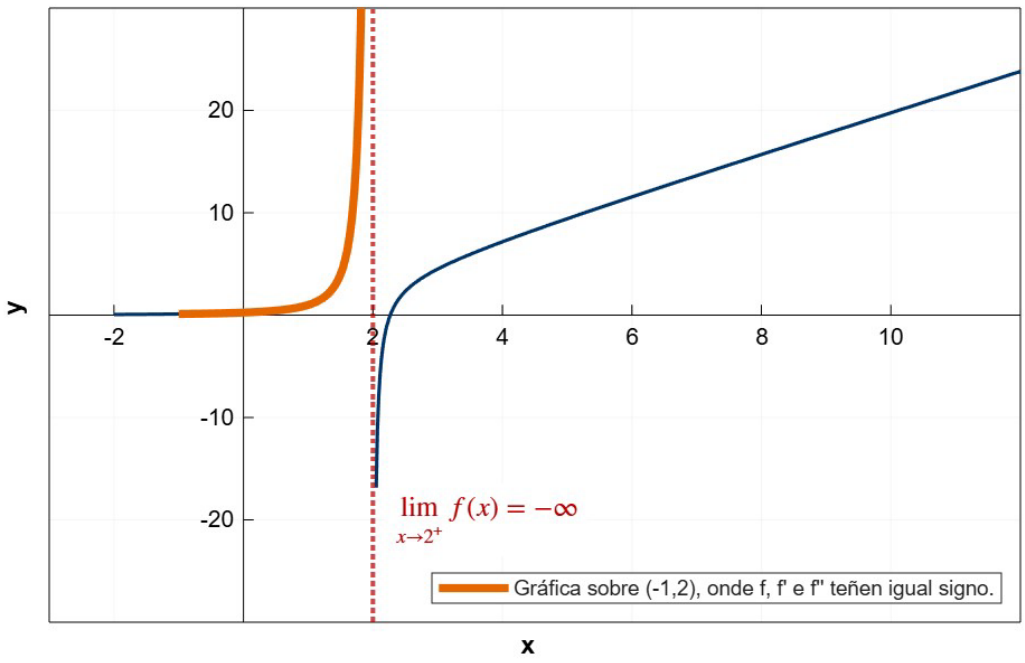
Facendo $(1) - (3)$ vemos que $4b = -4$, conque $\boldsymbol{b = -1}$.

Facendo agora $(2) + (4)$ chégase a $2b + 2d = -8$, é dicir, $b + d = -4$, de onde $\boldsymbol{d = -3}$.

$$\left.\begin{array}{l}(1) \Longrightarrow 3a + c = 2\\ (2) \Longrightarrow a + c = -2\end{array}\right\} \Longrightarrow 2a = 4 \Longrightarrow \boldsymbol{a = 2}.$$

Por último, $\boldsymbol{c = -2 - a = -4}$.

3.2. Vale, por exemplo,



No intervalo $(-1,2)$, f é positiva, f' é positiva porque f é crecente e f'' é positiva porque f é convexa.

Ao ser $\lim_{x\to 2^+} f(x) = -\infty$, a recta $x = 2$ é unha asíntota vertical.

3.3.

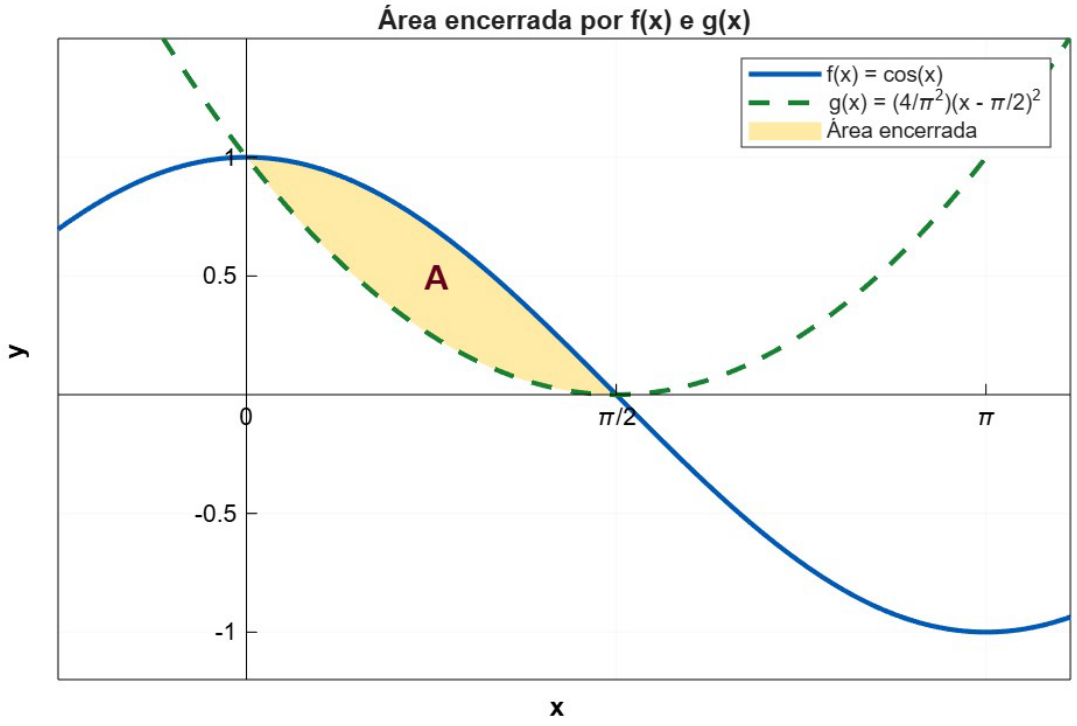
$$f(x) = \cos x, \qquad g(x) = \frac{4}{\pi^2}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2.$$

Obsérvese que $g(0) = 1 = f(0)$ e que $g(\pi/2) = 0 = f(\pi/2)$.

Por outra banda, como g é un polinomio de grao 2 con coeficiente principal positivo, a súa gráfica é unha parábola convexa. Ademais, o vértice atópase en $x = \pi/2$, porque

$$g'(x) = \frac{8}{\pi^2}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}.$$

(Podería engadirse que, ao ser $g(0) = g(\pi) = 1$ e estar os valores de f comprendidos entre -1 e 1, as gráficas das dúas funcións non se cortan en ningún outro punto á parte dos xa mencionados (ver debuxo).)



En consecuencia, a área pedida é:

$$A = \int_0^{\pi/2} (f(x) - g(x))\, dx = \int_0^{\pi/2} \left(\cos x - \frac{4}{\pi^2}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2\right) dx = \left[\sin x - \frac{4}{\pi^2}\frac{(x - \pi/2)^3}{3}\right]_0^{\pi/2}$$

$$= \left(\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - 0\right) - \left(\sin(0) + \frac{4}{\pi^2}\frac{1}{3}\frac{\pi^3}{8}\right) = 1 - \frac{\pi}{6}\ \text{u}^2,$$

onde u indica unidade de lonxitude. Pode engadirse que

$$1 - \frac{\pi}{6} \approx 0.4764.$$

PREGUNTA 4

4.1. Considérase a recta

$$r: \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{3}.$$

4.1.1. Ecuación do plano π que contén a r e ao punto $Q(2,-1,1)$:

Posto que $P(1,1,0) \in r$, os vectores $\overrightarrow{PQ} = (1,-2,1)$ e $\vec{v}_r = (2,1,3)$ son xeradores de π.

Entón, como

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -6(x-1) + 2(y-1) + z + 4z - (x-1) - 3(y-1)$$

$$= -6x + 6 + 2y - 2 + 5z - x + 1 - 3y + 3 = -7x - y + 5z + 8,$$

a ecuación pedida é $\boldsymbol{\pi}$: $\mathbf{-7x - y + 5z + 8 = 0}$.

4.1.2. $\pi^*: x + y - z - 1 = 0$.

$$\vec{v}_r \cdot \vec{n}_{\pi^*} = (2,1,3) \cdot (1,1,-1) = 2 + 1 - 3 = 0,$$

o que demostra que o vector director de r, $\vec{v}_r$, e o vector normal ao plano π^*, $\vec{n}_{\pi^*}$, son perpendiculares, e polo tanto que **$\boldsymbol{r}$ e $\boldsymbol{\pi}^*$ son paralelos**.

A distancia de r a π^* coincide coa distancia de $P(1,1,0)$ a π^*. Ao ser $\pi^*: Ax + By + Cz + D = 0$ con $A = 1, B = 1, C = -1$ e $D = -1$, e $P(x_0, y_0, z_0)$ con $x_0 = 1$, $y_0 = 1$ e $z_0 = 0$, tense

$$\mathbf{d}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{\pi}^*) = \mathrm{d}(P, \pi^*) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|1 + 1 + 0 - 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{3}}},$$

ou, se se quere, $\boldsymbol{\sqrt{3}/3}$.

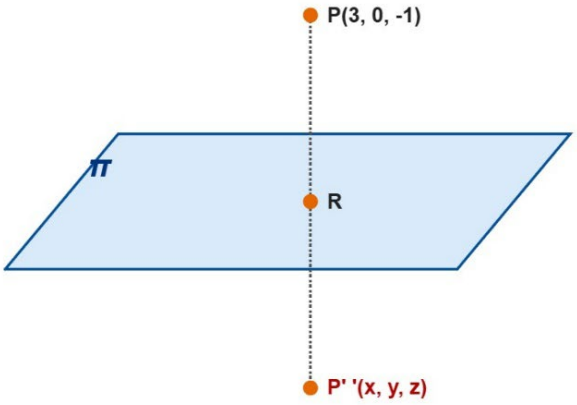
4.2.

4.2.1.



$$\left.\begin{cases} \dfrac{3+x}{2} = 2 \Longrightarrow 3 + x = 4 \Longrightarrow x = 1, \\ \dfrac{0+y}{2} = -1 \Longrightarrow y = -2, \\ \dfrac{-1+z}{2} = 2 \Longrightarrow -1 + z = 4 \Longrightarrow z = 5. \end{cases}\right\} \Longrightarrow \boldsymbol{P'(1,-2,5)} \text{ é o punto pedido.}$$

4.2.2.



$$\pi: x + 2y + z - 8 = 0.$$

Cálculo do punto R: este punto é a intersección do plano π coa recta r que pasa por $P(3,0,-1)$ e ten como vector director $\vec{n}_\pi = (1,2,1)$, é dicir,

$$r: \begin{cases} x = 3 + \lambda, \\ y = 2\lambda, \\ z = -1 + \lambda, \end{cases} \quad , \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Posto que

$$\underbrace{(3+\lambda)}_{x} + 2\underbrace{(2\lambda)}_{y} + \underbrace{(-1+\lambda)}_{z} - 8 = 6\lambda - 6 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1,$$

tense que $R(4,2,0)$.

Obtención do punto pedido P'':

$$\left.\begin{cases} \dfrac{3+x}{2} = 4 \Longrightarrow 3 + x = 8 \Longrightarrow x = 5, \\ \dfrac{0+y}{2} = 2 \Longrightarrow y = 4, \\ \dfrac{-1+z}{2} = 0 \Longrightarrow z = 1. \end{cases}\right\} \Longrightarrow \boldsymbol{P''(5,4,1)} \text{ é o punto pedido.}$$

NOTA FINAL: *as solucións que se presentan aquí son só propostas. É habitual que os problemas admitan varias formas de resolución, todas elas correctas e, polo tanto, igualmente válidas.*