O exame consta de **4 preguntas de resposta obrigatoria, puntuadas cada unha con 2,5 puntos**: a primeira sen apartados optativos e as tres seguintes con posibilidade de elección entre apartados.

PREGUNTA 1. ESTATÍSTICA E PROBABILIDADE. (2,5 puntos)

CONTEXTO

Algunhas probas médicas resultan ser «positivas» ou «negativas». Se a proba fose infalible, «positiva» indicaría que a persoa examinada ten a enfermidade en cuestión; «negativa» indicaría que non a ten. Unha guionista está escribindo, para unha coñecida plataforma de *streaming*, unha historia que ten lugar nun país imaxinario. Explica no seu guión que, para detectar unha rara enfermidade que afecta a 1 de cada 10000 persoas, unha empresa farmacéutica logra desenvolver unha proba que resulta ser moi fiable, pois soamente 1 de cada 100 persoas libres da enfermidade obtén un resultado positivo, e soamente 2 de cada 100 persoas que padecen a enfermidade obteñen resultados negativos. Di tamén que os detalles que revelan o deseño da proba están protexidos por varios sistemas de seguridade, e que, o 9 de agosto de 2024, a clave que permite abrir o último deses sistemas é o número 219, que se calculou, especificamente para ese día, do seguinte xeito:

$$\text{clave} = \text{n.}^{\text{o}} \text{ de ríos cuxa lonxitude en metros comeza co díxito } 9,$$
$$\text{de entre os } 2000 \text{ máis longos do país} = 219.$$

Pouco antes de entregar o seu guión, xórdenlle dúbidas acerca da verosimilitude das súas cifras, conque decide compartilas cunha amiga matemática. Esta dille que lle responderá despois de ter calculado as seguintes probabilidades:

- $P_1 =$ a probabilidade de que unha persoa cunha proba positiva teña a enfermidade.
- $P_2 =$ a probabilidade de que unha persoa cunha proba negativa teña a enfermidade.
- $P_3 =$ a probabilidade de que 219 ríos ou máis teñan unha lonxitude en metros cuxo primeiro díxito sexa o 9. Con relación a este punto, a amiga matemática observa que, en moitos conxuntos de datos reais, os primeiros díxitos non se distribúen de xeito uniforme, senón que seguen a chamada lei de Benford, a cal afirma que a probabilidade de que un número comece co díxito d é $p = \log_{10}(1 + 1/d)$. Por elo, suporá que a probabilidade de que un río teña unha lonxitude en m cuxo primeiro díxito sexa o 9 é $p = 0.0458$.

Responda estes tres apartados: 1.1., 1.2. e 1.3.

1.1. Calcule P_1 e P_2. Entenda que os únicos resultados posibles da proba son «positivo» ou «negativo». **(0,5 + 0,5 = 1 punto)**

1.2. Calcule P_3. **(1 punto)**

1.3. En función dos valores de P_1, P_2 e P_3, dea ao menos un motivo polo cal a guionista debería modificar algunha das súas cifras. Non é necesario que diga cales deberían ser esas modificacións nin como deberían ser efectuadas. **(0,5 puntos)**

PREGUNTA 2. NÚMEROS E ÁLXEBRA. (2,5 puntos)

Responda un destes dous apartados: 2.1. ou 2.2.

2.1. Responda os dous subapartados seguintes, considerando este sistema lineal:

$$\begin{cases} (m+1)x & & + & z & = & 1, \\ (m+1)x & + \quad y & + & z & = & m+1, \\ (m+1)x & + \quad my & + & (m-1)z & = & m. \end{cases}$$

2.1.1. Discuta o sistema en función do valor do parámetro real m. **(2 puntos)**

2.1.2. Se é posible, resólvao no caso $m = 0$. **(0,5 puntos)**

2.2. Responda os dous subapartados seguintes:

2.2.1. Calcule A se $(AB)^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. **(1 punto)**

2.2.2. Se $A = \begin{pmatrix} 3 & x \\ y & z \end{pmatrix}$ é invertible, obteña os valores de x, y e z sabendo que $\det(A - 3I) = 0$, que $y \neq 0$ e que $(3z)A^{-1} + I = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$. Enténdase que I é a matriz identidade. **(1,5 puntos)**

PREGUNTA 3. ANÁLISE. (2,5 puntos)

Responda un destes dous apartados: 3.1. ou 3.2.

3.1. Responda os dous subapartados seguintes:

3.1.1. Enuncie os teoremas de Rolle e do valor medio do cálculo diferencial. **(1,25 puntos)**

3.1.2. Explique se $f: [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$, está ou non nas hipóteses do teorema do valor medio do cálculo diferencial. En caso de que o estea, calcule un valor c para o cal se cumpra a tese dese teorema. **(0,75 + 0,5 = 1,25 puntos)**

3.2. Responda os dous subapartados seguintes:

3.2.1. Calcule mediante cambio de variable as seguintes integrais:

3.2.1.1. $\int (\sin x)^5 \cos x \, dx$. **(0,5 puntos)**

3.2.1.2. $\int (\ln x)/x \, dx$. **(0,5 puntos)**

3.2.2. Calcule $\int (\ln x)/x \, dx$ empregando o método de integración por partes. Logo, obteña algún valor de B tal que $\int_{\mathrm{e}}^{B} (\ln x)/x \, dx = 3/2$. **(1 + 0,5 = 1,5 puntos)**

PREGUNTA 4. XEOMETRÍA. (2,5 puntos)

Responda un destes dous apartados: 4.1. ou 4.2.

4.1. Responda os dous subapartados seguintes:

4.1.1. Considéranse $\pi: ax + y + z = 1$, onde a é un parámetro real, e $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{3}$.

4.1.1.1. Estude a posición relativa do plano π e a recta r en función de a. **(0,5 puntos)**

4.1.1.2. Obteña o valor de a que fai que π e r sexan perpendiculares. **(0,5 puntos)**

4.1.1.3. Razoe se r pode estar contida en π ou non. **(0,5 puntos)**

4.1.2. Se π é o plano de ecuación $-3x + y + z = 1$, diga que valor debe tomar o parámetro real b para que a recta $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y-b}{3} = \frac{z+1}{3}$ estea contida en π. **(1 punto)**

4.2. Responda os dous subapartados seguintes, onde π é o plano de ecuación $2x - y + z = 1$:

4.2.1. Calcule a distancia de π ao punto de corte das rectas

$r_1: \begin{cases} x = 2 + \lambda, \\ y = 0, \\ z = -1 - \lambda \end{cases}$ e $r_2: \begin{cases} x = \mu, \\ y = -1 + \mu, \\ z = 0, \end{cases}$ $(\lambda, \mu \in \mathbb{R})$. **(1,25 puntos)**

4.2.2. Obteña o punto simétrico de $P(1,0,0)$ con respecto a π. **(1,25 puntos)**