MATEMÁTICAS APLICADAS ÁS CIENCIAS SOCIAIS

CRITERIOS DE AVALIACIÓN

PROBLEMAS:

1. Calcular B e obter os valores de α: $1 + 1 = 2$ puntos.

2.
   a) Calcular os kg do primeiro día, os do último e o día de recolección máxima: $0.25 + 0.25 + 0.5 = 1$ punto.
   b) Representar graficamente a función: 1 punto.

3. 2 puntos.

CUESTIÓNS:

1. Resposta correcta (a): 1 punto.
   Resposta incorrecta: -0.5 puntos.

2. Resposta correcta (c): 1 punto.
   Resposta incorrecta: -0.5 puntos.

3. Resposta correcta (b): 1 punto.
   Resposta incorrecta: -0.5 puntos.

4. Resposta correcta (a): 1 punto.
   Resposta incorrecta: -0.5 puntos.

PAU (MAIORES DE 25 ANOS) Código: 42

2025

MATEMÁTICAS APLICADAS ÁS CIENCIAS SOCIAIS

PROBLEMAS (ata 2 puntos cada problema):

1. Calcule $B = A^2 - AA^T$ se $A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. Logo, diga para que valores de α a matriz B é invertible.

2. Nos 80 días que dura a recolección, recóllense nun certo cerdeiral unha cantidade de cereixas que, en kg, vén dada pola función
$$C(t) = 40000 + 2700t - 60t^2 + \frac{t^3}{3}, \qquad 1 \leq t \leq 80,$$
onde t indica o tempo en días. Responda aos dous apartados seguintes:
   a) Cantos kg de cereixas se recollen o primeiro día? E o último? Cal é o día de recolección máxima?
   b) Represente graficamente a función C.

3. Un 95% dos habitantes dunha certa cidade non viaxan en taxi máis de dez veces ao ano, e un 40% dos que si o fan tamén comen fóra da casa máis de trinta veces ao ano. Se se elixe ao azar un habitante desa cidade, calcule a probabilidade de que viaxe en taxi máis de dez veces ao ano e coma fóra da casa máis de trinta veces ao ano.

CUESTIÓNS (valórase con 1 punto a resposta correcta, 0 puntos se non se contesta e -0.5 puntos se a resposta é incorrecta):

1. Se $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & \alpha \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, entón
   a) $A + I$ é invertible para todo valor de α.
   b) A pode ser invertible para algún valor de α.
   c) $A - I$ é invertible se $\alpha \neq 0$.

2. A derivada da función $f(x) = x \ln x$ en $x = \mathrm{e}$ é
   a) 1.
   b) 0.
   c) 2.

3. A función $f(x) = x^3 - 3x^2 + x + 1$
   a) ten un extremo relativo en $x = 1$.
   b) ten un punto de inflexión en $x = 1$.
   c) ten límite 0 cando x tende a infinito.

4. Sexan A e B sucesos aleatorios tales que $P(A \cup B) = 0.7$, $P(A \cap B) = 0.2$ e $P(B) = 2P(A)$. Entón,
   a) $P(A) = 0.3$.
   b) $P(A) = 0.4$.
   c) $P(B) = 0.5$.

MATEMÁTICAS APLICADAS ÁS CIENCIAS SOCIAIS

PROBLEMAS (hasta 2 puntos cada problema):

1. Calcule $B = A^2 - AA^T$ si $A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. Luego, diga para qué valores de α la matriz B es invertible.

2. En los 80 días que dura la recolección, se recogen en un cierto cerezal una cantidad de cerezas que, en kg, viene dada por la función
$$C(t) = 40000 + 2700t - 60t^2 + \frac{t^3}{3}, \qquad 1 \le t \le 80,$$
donde t indica el tiempo en días. Responda a los dos apartados siguientes:
   a) ¿Cuántos kg de cerezas se recogen el primer día? ¿Y el último? ¿Cuál es el día de recolección máxima?
   b) Represente gráficamente la función C.

3. Un 95% de los habitantes de una cierta ciudad no viajan en taxi más de diez veces al año, y un 40% de los que sí lo hacen también comen fuera de casa más de treinta veces al año. Si se elige al azar un habitante de esa ciudad, calcule la probabilidad de que viaje en taxi más de diez veces al año y coma fuera de casa más de treinta veces al año.

CUESTIONES (se valora con 1 punto la respuesta correcta, 0 puntos si no se contesta y -0.5 puntos si la respuesta es incorrecta):

1. Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & \alpha \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, entonces
   a) $A + I$ es invertible para todo valor de α.
   b) A puede ser invertible para algún valor de α.
   c) $A - I$ es invertible si $\alpha \neq 0$.

2. La derivada de la función $f(x) = x \ln x$ en $x = \mathrm{e}$ es
   a) 1.
   b) 0.
   c) 2.

3. La función $f(x) = x^3 - 3x^2 + x + 1$
   a) tiene un extremo relativo en $x = 1$.
   b) tiene un punto de inflexión en $x = 1$.
   c) tiene límite 0 cuando x tiende a infinito.

4. Sean A y B sucesos aleatorios tales que $P(A \cup B) = 0.7$, $P(A \cap B) = 0.2$ y $P(B) = 2P(A)$. Entonces,
   a) $P(A) = 0.3$.
   b) $P(A) = 0.4$.
   c) $P(B) = 0.5$.

1) $A=\begin{pmatrix}\alpha & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix}$. $A^2=\begin{pmatrix}\alpha & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha^2+2 & \alpha+3\\ 2\alpha+6 & 11\end{pmatrix}$,

$AA^T=\begin{pmatrix}\alpha & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha & 2\\ 1 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha^2+1 & 2\alpha+3\\ 2\alpha+3 & 13\end{pmatrix}$,

$B=A^2-AA^T=\begin{pmatrix}1 & -\alpha\\ 3 & -2\end{pmatrix}$. $\det B=-2+3\alpha=0 \Leftrightarrow 3\alpha=2 \Leftrightarrow \alpha=\frac{2}{3}$.

Luego B tiene inversa si $\alpha\in\mathbb{R}\setminus\{2/3\}$ y no la tiene si $\alpha=2/3$.

2) $C(t)=40000+2700t-60t^2+\frac{t^3}{3}$. $1\le t\le 80$.

2.a) $\boxed{C(1)}=40000+2700-60+\frac{1}{3}=42640+\frac{1}{3}=\boxed{42640.\hat{3}\text{ kg el 1.}^{\text{er}}\text{ día}}$

$\boxed{C(80)}=40000+216000-384000+\frac{512000}{3}=-128000+\frac{512000}{3}=$

$=\frac{-384000+512000}{3}=\frac{128000}{3}=\boxed{42666.\hat{6}\text{ kg el último día}}$

$C'(t)=2700-120t+t^2=0 \Leftrightarrow t=\frac{120\pm\sqrt{14400-10800}}{2}=$

$=\frac{120\pm\sqrt{3600}}{2}=\frac{120\pm 60}{2}$ — $\frac{120-60}{2}=\frac{60}{2}=30$; $\frac{120+60}{2}=\frac{180}{2}=\cancel{90}$

$C''(t)=-120+2t$, $C''(30)=-120+60=-60<0$.

El día n.º 30 es el de máxima recolección.

2.b) $C'(t)=\underbrace{(t-30)}_{\substack{<0 \text{ si } 1\le t<30\\ >0 \text{ si } 30<t\le 80}}\underbrace{(t-90)}_{<0 \text{ si } 1\le t\le 80}$

$C'>0$ (C crece) si $1\le t<30$

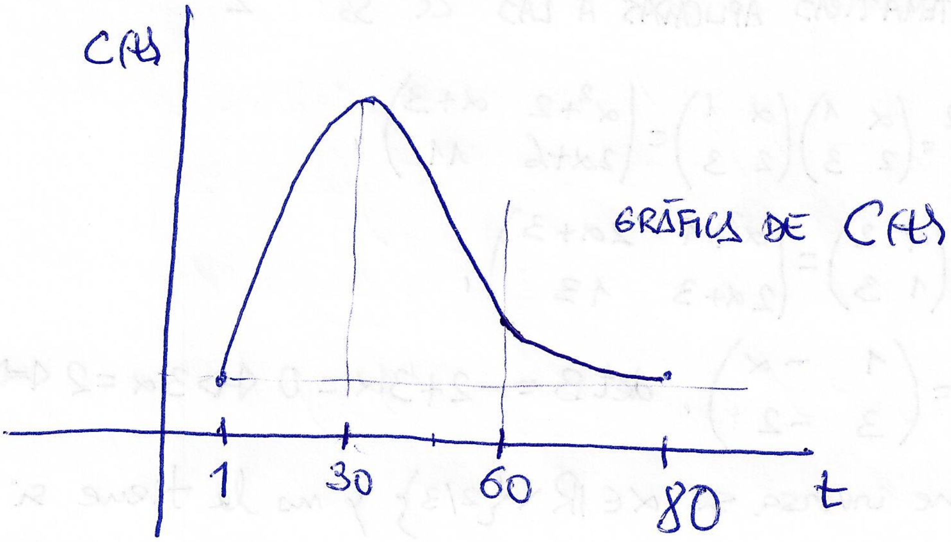
$C'<0$ (C decrece) si $30<t\le 80$

$C''(t)=2t-120=2(t-60)$

- máximo en $t=30$.
- inflexión en $t=60$.

$C''<0$ (C cóncava) si $1\le t<60$

$C''>0$ (C convexa) si $60<t\le 80$



3) T = «viajar en taxi más de 10 veces al año».
C = «comer fuera más de 30 veces al año».

$P(T) = 0.05$, $P(\overline{T}) = 0.95$, $P(C|T) = 0.4$

¿$P(T \cap C)$?

$$0.4 = P(C|T) = \frac{P(T \cap C)}{P(T)} = \frac{P(T \cap C)}{0.05}$$

$$\Rightarrow \boxed{P(T \cap C) = 0.4 \cdot 0.05 = 0.02}.$$

3) SOLUCIÓN ALTERNATIVA (tabla de contingencia)

	T	$\overline{T}$	
C	$0.4 \times 5 = 2$		
$\overline{C}$	3		
	5	95	100

$P(T \cap C) = 0.02$.

CUESTIÓN 1 $A+I=\begin{pmatrix}2&0&0\\2&1&\alpha\\3&0&1\end{pmatrix}$

$\det(A+I)=2\begin{vmatrix}1&\alpha\\0&1\end{vmatrix}=2 \Rightarrow$ $\boxed{\text{a) } A+I \text{ es invertible para todo valor de } \alpha}$

Notas: A no es invertible para ningún valor de α porque tiene una columna de ceros ($\Rightarrow \det A=0$ siempre)

$A-I=\begin{pmatrix}0&0&0\\2&-1&\alpha\\3&0&-1\end{pmatrix}$ también tiene determinante nulo.

CUESTIÓN 2 $f(x)=x\ln x$, $f'(x)=\ln x+1$, $f'(e)=1+1=2$.

$\boxed{\text{c) } 2}$

CUESTIÓN 3 $f(x)=x^3-3x^2+x+1$, $f'(x)=3x^2-6x+1$

$f'(1)=3-6+1=-2\neq 0$, $f''(x)=6x-6$, $f''(1)=0$,

$f'''(x)=6$, $f'''(1)\neq 0$. $\boxed{\text{b) tiene un punto de inflexión en } x=1}$

Nota: $\lim_{x\to\infty} f(x)=+\infty$

CUESTIÓN 4: $\underbrace{P(A\cup B)}_{0.7}=\underbrace{P(A)+\overbrace{P(B)}^{2P(A)}}_{3P(A)}-\underbrace{P(A\cap B)}_{0.2}$

$3P(A)=0.7+0.2=0.9$, $\boxed{\text{a) } P(A)=0.3}$.