CIUG

PAU (MAIORES DE 25 ANOS)

2025

Código: 31

MATEMÁTICAS

CRITERIOS DE AVALIACIÓN

PROBLEMAS:

1. Discutir o sistema: 2 puntos.

2. Obter a ecuación do plano e calcular a distancia: $1 + 1 = 2$ puntos.

3. Obter os valores de a e b para os que f é continua e derivable: $1 + 1 = 2$ puntos.

CUESTIÓNS:

1. Resposta correcta (b): 1 punto.
   Resposta incorrecta: -0.5 puntos.

2. Resposta correcta (b): 1 punto.
   Resposta incorrecta: -0.5 puntos.

3. Resposta correcta (c): 1 punto.
   Resposta incorrecta: -0.5 puntos.

4. Resposta correcta (a): 1 punto.
   Resposta incorrecta: -0.5 puntos.

MATEMÁTICAS

PROBLEMAS (ata 2 puntos cada problema):

1. Discuta segundo o valor de m o sistema de ecuacións lineais $\begin{cases} mx + y - z = 0, \\ (m-1)y + 2z = 1, \\ 2mx + 2y - z = 1. \end{cases}$

2. Obteña a ecuación do plano que pasa polos puntos $O(0,0,0)$, $P(1,0,1)$ e $Q(0,1,0)$. Logo, calcule a distancia dese plano ao punto $R(2,3,2)$.

3. Diga, razoadamente, para que valores de a e b a función $f(x) = \begin{cases} ax+1 & \text{se} \quad x \leq 0, \\ x^3+3x^2+b & \text{se} \quad x > 0 \end{cases}$ é continua. Logo, para que valores de a e b é derivable.

CUESTIÓNS (valórase con 1 punto a resposta correcta, 0 puntos se non se contesta e -0.5 puntos se a resposta é incorrecta):

1. Se $AX + B = C$, onde A, X, B e C son matrices cadradas de orde maior que 1, con A invertible, entón
   a) $X = (C-B)A^{-1}$.
   b) $X = A^{-1}(C-B)$.
   c) $X = (C-B)/A$.

2. Os puntos $O(0,0,0)$, $P(1,0,1)$, $Q(a,1,0)$ e $R(0,3,b)$
   a) son coplanarios (é dicir, pertencen a un mesmo plano) soamente se $a = b = 0$.
   b) son coplanarios se $b = -3a$.
   c) Ningunha das anteriores afirmacións é certa.

3. O valor do límite $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\sin^2 x}$ é
   a) $-1/2$.
   b) 0.
   c) $1/2$.

4. A integral definida $\int_0^b e^x \, dx$
   a) vale 1 se $b = \ln 2$.
   b) vale 1 se $b = 1$.
   c) non vale 1 para ningún valor de b.

MATEMÁTICAS

PROBLEMAS (hasta 2 puntos cada problema):

1. Discuta según el valor de m el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} mx + y - z = 0, \\ (m-1)y + 2z = 1, \\ 2mx + 2y - z = 1. \end{cases}$

2. Obtenga la ecuación del plano que pasa por los puntos $O(0,0,0)$, $P(1,0,1)$ y $Q(0,1,0)$. Luego, calcule la distancia de ese plano al punto $R(2,3,2)$.

3. Diga, razonadamente, para qué valores de a y b la función $f(x) = \begin{cases} ax+1 & \text{si} \quad x \leq 0, \\ x^3+3x^2+b & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$ es continua. Luego, para qué valores de a y b es derivable.

CUESTIONES (se valora con 1 punto la respuesta correcta, 0 puntos si no se contesta y -0.5 puntos si la respuesta es incorrecta):

1. Si $AX + B = C$, donde A, X, B y C son matrices cuadradas de orden mayor que 1, con A invertible, entonces
   a) $X = (C-B)A^{-1}$.
   b) $X = A^{-1}(C-B)$.
   c) $X = (C-B)/A$.

2. Los puntos $O(0,0,0)$, $P(1,0,1)$, $Q(a,1,0)$ y $R(0,3,b)$
   a) son coplanarios (es decir, pertenecen a un mismo plano) solamente si $a = b = 0$.
   b) son coplanarios si $b = -3a$.
   c) Ninguna de las anteriores afirmaciones es cierta.

3. El valor del límite $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\sin^2 x}$ es
   a) $-1/2$.
   b) 0.
   c) $1/2$.

4. La integral definida $\int_0^b \mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x$
   a) vale 1 si $b = \ln 2$.
   b) vale 1 si $b = 1$.
   c) no vale 1 para ningún valor de b.

MATEMÁTICAS 3

1) Discuta según los valores de m: $\begin{cases} mx + y - z = 0, \\ (m-1)y + 2z = 1, \\ 2mx + 2y - z = 1. \end{cases}$

Sol.:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} m & 1 & -1 & 0 \\ 0 & m-1 & 2 & 1 \\ 2m & 2 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 - 2F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} m & 1 & -1 & 0 \\ 0 & m-1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Sistema triangular equivalente:

$$\left\{\begin{array}{l} mx + y - z = 0 \\ (m-1)y + 2z = 1 \\ z = 1 \end{array}\right\}$$

Discusión:

- Si $m \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$, la única solución del sistema es

$\boxed{z = 1}$, $\boxed{y = \frac{1-2z}{m-1} = \frac{-1}{m-1} = \frac{1}{1-m}}$.

$\boxed{x = \frac{-y+z}{m} = \frac{\frac{1}{m-1}+1}{m} = \frac{\frac{\cancel{1}+\cancel{m}\cancel{-1}}{m-1}}{\cancel{m}} = \frac{1}{m-1}}$, con que en

este caso el sistema es compatible determinado.

- Si $m = 1$, $\left\{\begin{array}{r} x + y - z = 0 \\ 2z = 1 \\ z = 1 \end{array}\right\}$ es incompatible (no tiene solución), ya que las ecuaciones 2.ª y 3.ª no pueden cumplirse a la vez.

- Si $m = 0$, $\left\{\begin{array}{r} y - z = 0 \\ -y + 2z = 1 \\ \boxed{z = 1} \end{array}\right.$ $y = 1$, $y = 1$ es compatible indeterminado. Sus infinitas soluciones son $\boxed{x \in \mathbb{R} \text{ cq.}, \ y = 1, \ z = 1.}$

2) Ecuación del plano que pasa por $O(0,0,0)$, $P(1,0,1)$ y $Q(0,1,0)$:

$\pi: Ax+By+Cz=D$, con $(A,B,C)=\vec{n}_\pi$ vector normal a π

y $D=0$ (ya que $O(0,0,0)\in\pi$)

$\vec{u}=\vec{PO}=(1,0,1)$, $\vec{v}=\vec{QO}=(0,1,0)$

$$\vec{n}_\pi=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix}\vec{i}-\cancel{\begin{vmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{vmatrix}\vec{j}}+\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}\vec{k}=-\vec{i}+\vec{k}=(-1,0,1)$$

Luego $\pi: -x+z=0$ o, equivalentemente, $\boxed{\pi: x-z=0}$.

Distancia del punto $R(2,3,2)$ al plano π: como $R\in\pi$, $\boxed{d(R,\pi)=0}$.

Si usamos la fórmula:

$$\boxed{d(R,\pi)=\frac{|A\cdot 2+B\cdot 3+C\cdot 2-D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{|2-2|}{\sqrt{2}}=0}$$

3) $$f(x)=\begin{cases} ax+1 & \text{si } x\leq 0,\\ x^3+3x^2+b & \text{si } x>0.\end{cases}$$

$f(0)=1$, $\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}(ax+1)=1$, $\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}(x^3+3x^2+b)=b$.

Luego f es continua si $b=1$ y $a\in\mathbb{R}$ cualquiera.

$$f'(x)=\begin{cases} a & \text{si } x<0\\ 3x^2+6x & \text{si } x>0\end{cases}$$

$\lim_{x\to 0^-} f'(x)=a$

$\lim_{x\to 0^+} f'(x)=0$

Luego f es derivable si $b=1$ y $a=0$.

para ser derivable ha de ser continua.

CUESTIÓN 1 $AX+B=C$, $AX=C-B$,

$$\boxed{\text{b) } X=A^{-1}(C-B).}$$

CUESTIÓN 2 $\vec{PO}=(1,0,1)$, $\vec{QO}=(a,1,0)$, $\vec{RO}=(0,3,b)$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ a & 1 & 0 \\ 0 & 3 & b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & b \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = b+3a=0 \Leftrightarrow b=-3a.$$

$$\boxed{\text{b) son coplanarios si } b=-3a.}$$

CUESTIÓN 3 $$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\sin^2 x} \overset{\frac{0}{0}\text{ L'Hôpital}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{\sin x}}{2(\cancel{\sin x})(\cos x)} = \frac{1}{2}$$

$\boxed{\frac{0}{0} \text{ L'Hôpital}}$

$$\boxed{\text{c) } 1/2.}$$

CUESTIÓN 4 $$\int_0^b e^x dx = e^x\Big|_0^b = e^b - 1 \underset{\text{si } b=\ln 2}{=} 2-1=1$$

$$\boxed{\text{a) vale 1 si } b=\ln 2}$$