

O exame consta de **4 preguntas de resposta obrigatoria, puntuadas cada unha con 2,5 puntos**: a primeira sen apartados optativos e as tres seguintes con posibilidade de elección entre apartados.

PREGUNTA 1. ESTATÍSTICA E PROBABILIDADE. (2,5 puntos)

CONTEXTO

As cafeterías universitarias son espazos nos que, ademais de poder consumir alimentos e bebidas, en numerosas ocasións se empregan como puntos de encontro para outros eventos. Segundo os datos recollidos pola dirección da cafetería dunha facultade, o 65% dos seus clientes son estudantes, o 25% persoal da universidade e o 10% restante son persoas alleas á universidade.

Co obxectivo de estudar se é necesario realizar modificacións na cafetería, os seus responsables analizaron datos sobre o tempo de espera ata que un cliente foi atendido e sobre a forma de realizar os pagamentos. Pode supoñerse que o tempo de espera ata que un cliente é atendido segue unha distribución aproximadamente normal, con media igual a 5 minutos e de tal modo que o 90% dos clientes son atendidos antes de 8 minutos. Polos datos recollidos, chegaron á conclusión de que o 30% dos estudantes efectúan os pagamentos en efectivo, sendo esta porcentaxe igual ao 70% para o persoal da universidade, mentres que o 80% dos pagamentos realizados por persoas alleas á universidade se fan en efectivo.

Responda estes tres apartados: 1.1., 1.2. e 1.3.

- 1.1.** Cal é a probabilidade de que un cliente sexa atendido antes de 4 minutos?
- 1.2.** Calcular a probabilidade de que un pagamento nesta cafetería non fose realizado en efectivo.
- 1.3.** Se un pago se fixo en efectivo, que é máis probable, que fose realizado por estudantes ou por persoal da universidade?

PREGUNTA 2. NÚMEROS E ÁLXEBRA. (2,5 puntos). Responda un destes dous apartados: 2.1. ou 2.2.

2.1. Responda ás dúas cuestións seguintes:

2.1.1. Se $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, ache $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tales que $A^2 + \alpha A + \beta I = 0$, onde I e 0 son as matrices identidade e cero, respectivamente.

2.1.2. Calcule a matriz cadrada X tal que $XA = B$, se $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Son iguais XA e AX ?

2.2. Discuta, segundo os valores do parámetro m , o sistema
$$\begin{cases} x + y + mz = 1, \\ x + my + z = 1, \\ mx + y + z = 1. \end{cases}$$

PREGUNTA 3. ANÁLISE. (2,5 puntos). Responda un destes dous apartados: 3.1. ou 3.2.

3.1. Dada a función $f(x) = \begin{cases} kx^2 + 2x & \text{se } x \leq 1, \\ x^2 - m & \text{se } x > 1, \end{cases}$ pídese responder ás seguintes cuestións:

3.1.1. Que condición deben cumprir k e m para que f sexa continua en $x = 1$?

3.1.2. Para que valores de k e m é f derivable en $x = 1$?

3.2. Debuxe a rexión cerrada pola gráfica de $f(x) = \sqrt{2x+1}$, o eixe X e as rectas $x = 0$, $x = 4$. Logo, calcule a súa área.

PREGUNTA 4. XEOMETRÍA. (2,5 puntos). Responda un destes dous apartados: 4.1. ou 4.2.

4.1. Determine o valor que debe tomar k para que os planos

$$\pi_1: kx + y + \frac{1}{4}z + 2 = 0 \quad \text{e} \quad \pi_2: 3x + 4y + z + 3 = 0$$

sexan paralelos. Calcule tamén o valor de k que fai que eses mesmos planos sexan perpendiculares

4.2. Considérense o punto $P(0,1,0)$ e a recta $r: (x, y, z) = (2,0,3) + \lambda(1,2,3)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

4.2.1. Determine a ecuación continua da recta s que é paralela a r e pasa polo punto P .

4.2.2. Obteña a ecuación implícita ou xeral do plano π que pasa por P e é perpendicular a r .

El examen consta de **4 preguntas de respuesta obligatoria, puntuadas cada una con 2,5 puntos**: la primera sin apartados optativos y las tres siguientes con posibilidad de elección entre apartados.

PREGUNTA 1. ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD. (2,5 puntos)

CONTEXTO

Las cafeterías universitarias son espacios en los que, además de poder consumir alimentos y bebidas, en numerosas ocasiones se emplean como puntos de encuentro para otros eventos. Según los datos recogidos por la dirección de la cafetería de una facultad, el 65% de sus clientes son estudiantes, el 25% personal de la universidad y el 10% restante son personas ajenas a la universidad.

Con el objetivo de estudiar si es necesario realizar modificaciones en la cafetería, sus responsables han analizado datos sobre el tiempo de espera hasta que un cliente ha sido atendido y sobre la forma de realizar los pagos. Puede suponerse que el tiempo de espera hasta que un cliente es atendido sigue una distribución aproximadamente normal, con media igual a 5 minutos y de tal modo que el 90% de los clientes son atendidos antes de 8 minutos. Por los datos recogidos, han llegado a la conclusión de que el 30% de los estudiantes efectúan los pagos en efectivo, siendo este porcentaje igual al 70% para el personal de la universidad, mientras que el 80% de los pagos realizados por personas ajenas a la universidad se hacen en efectivo.

Responda estos tres apartados: 1.1., 1.2. y 1.3.

- 1.1.** ¿Cuál es la probabilidad de que un cliente sea atendido antes de 4 minutos?
- 1.2.** Calcular la probabilidad de que un pago en esta cafetería no haya sido realizado en efectivo.
- 1.3.** Si un pago se hizo en efectivo, ¿qué es más probable, que haya sido realizado por estudiantes o por personal de la universidad?

PREGUNTA 2. NÚMEROS Y ÁLGEBRA. (2,5 puntos). Responda uno de estos dos apartados: 2.1. o 2.2.

2.1. Responda a las dos cuestiones siguientes:

2.1.1. Si $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, halle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tales que $A^2 + \alpha A + \beta I = 0$, donde I y 0 son las matrices identidad y cero, respectivamente.

2.1.2. Calcule la matriz cuadrada X tal que $XA = B$, si $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. ¿Son iguales XA y AX ?

2.2. Discuta, según los valores del parámetro m , el sistema
$$\begin{cases} x + y + mz = 1, \\ x + my + z = 1, \\ mx + y + z = 1. \end{cases}$$

PREGUNTA 3. ANÁLISIS. (2,5 puntos). Responda uno de estos dos apartados: 3.1. o 3.2.

3.1. Dada la función $f(x) = \begin{cases} kx^2 + 2x & \text{si } x \leq 1, \\ x^2 - m & \text{si } x > 1, \end{cases}$ se pide responder a las siguientes cuestiones:

3.1.1. ¿Qué condición deben cumplir k y m para que f sea continua en $x = 1$?

3.1.2. ¿Para qué valores de k y m es f derivable en $x = 1$?

3.2. Dibuje la región encerrada por la gráfica de $f(x) = \sqrt{2x+1}$, el eje X y las rectas $x = 0$, $x = 4$. Luego, calcule su área.

PREGUNTA 4. GEOMETRÍA. (2,5 puntos). Responda uno de estos dos apartados: 4.1. o 4.2.

4.1. Determine el valor que debe tomar k para que los planos

$$\pi_1: kx + y + \frac{1}{4}z + 2 = 0 \quad \text{y} \quad \pi_2: 3x + 4y + z + 3 = 0$$

sean paralelos. Calcule también el valor de k que hace que esos mismos planos sean perpendiculares.

4.2. Considérense el punto $P(0,1,0)$ y la recta $r: (x,y,z) = (2,0,3) + \lambda(1,2,3)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

4.2.1. Determine la ecuación continua de la recta s que es paralela a r y pasa por el punto P .

4.2.2. Obtenga la ecuación implícita o general del plano π que pasa por P y es perpendicular a r .

1.

Consideremos os seguintes sucesos e a variable de interese.

E ="Un cliente da cafetería é estudante", sendo $P(E) = 0,65$.

U ="Un cliente da cafetería é persoal da universidade", sendo $P(U) = 0,25$.

A ="Un cliente da cafetería é alleo á universidade", sendo $P(A) = 0,1$.

F ="O pago realízase en efectivo", sendo $P(F|E) = 0,3$, $P(F|U) = 0,7$ e $P(F|A) = 0,80$, polo que tamén sabemos que $P(\bar{F}|E) = 0,7$, $P(\bar{F}|U) = 0,3$ e $P(\bar{F}|A) = 0,20$.

X ="Tempo de espera ata ser atendido na cafetería". $X \rightarrow N(5, \sigma)$, $P(X < 8) = 0,9$.

1.1.

En primeiro lugar, temos que calcular o valor da desviación típica de X

$$P(X < 8) = 0,9 \rightarrow P\left(\frac{X-5}{\sigma} < \frac{8-5}{\sigma}\right) = P\left(Z < \frac{3}{\sigma}\right) = 0,9,$$

de onde empregando as táboas obtemos que $\frac{3}{\sigma} = 1,28 \rightarrow \sigma = \frac{3}{1,28} = 2,34$. Entón $X \rightarrow N(5; 2,34)$

$$\begin{aligned} P(X < 4) &= P\left(\frac{X-5}{2,34} < \frac{4-5}{2,34}\right) = P(Z < -0,43) = 1 - P(Z > -0,43) = 1 - P(Z < 0,43) = \\ &= 1 - 0,6664 = 0,3336 \end{aligned}$$

1.2.

$$P(\bar{F}) = P(\bar{F}|E)P(E) + P(\bar{F}|U)P(U) + P(\bar{F}|A)P(A) = 0,7 \times 0,65 + 0,3 \times 0,25 + 0,2 \times 0,1 = 0,55$$

Outra forma sería:

$$P(F) = P(F|E)P(E) + P(F|U)P(U) + P(F|A)P(A) = 0,3 \times 0,65 + 0,7 \times 0,25 + 0,8 \times 0,1 = 0,45$$

$$\text{Polo que } P(\bar{F}) = 1 - P(F) = 1 - 0,45 = 0,55$$

1.3.

Temos que comparar $P(E|F)$ e $P(U|F)$

$$P(E|F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)} = \frac{P(F|E)P(E)}{P(F)} = \frac{0,3 \times 0,65}{0,45} = \frac{0,195}{0,45} = 0,433.$$

$$P(U|F) = \frac{P(U \cap F)}{P(F)} = \frac{P(F|U)P(U)}{P(F)} = \frac{0,7 \times 0,25}{0,45} = \frac{0,175}{0,45} = 0,39.$$

Polo que é máis probable que o pago fose realizado por estudantes.

2.1.

2.1.1.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 5 \\ 2 & 11 \end{pmatrix}.$$

$$A^2 + \alpha A + \beta I = \begin{pmatrix} 14 & 5 \\ 2 & 11 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 14 + 2\alpha + \beta = 0 \\ 5 + 5\alpha = 0 \\ 2 + 2\alpha = 0 \\ 11 - \alpha + \beta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\alpha = -1 \text{ e } \beta = -12.$$

2.1.2.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, [XA = B \Leftrightarrow X = BA^{-1}].$$

- $\det A = 1, A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$
- $X = BA^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$
- $AX = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = B = XA. \text{ Logo } AX \neq XA.$

2.2.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & m & 1 \\ 1 & m & 1 & 1 \\ m & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{F_2 - F_1 \\ F_3 - mF_1}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & m & 1 \\ 0 & m-1 & 1-m & 0 \\ 0 & 1-m & 1-m^2 & 1-m \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 + F_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & m & 1 \\ 0 & m-1 & 1-m & 0 \\ 0 & 0 & 2-m-m^2 & 1-m \end{pmatrix} \xrightarrow{-F_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & m & 1 \\ 0 & m-1 & 1-m & 0 \\ 0 & 0 & m^2+m-2 & m-1 \end{pmatrix}.$$

$$m^2 + m - 2 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} \Leftrightarrow m \in \{-2, 1\}.$$

$$m^2 + m - 2 = (m+2)(m-1).$$

Sistema triangular equivalente:

$$\begin{cases} x + y + mz = 1, \\ (m-1)y + (1-m)z = 0, \\ (m+2)(m-1)z = m-1. \end{cases}$$

Discusión:

- Se $m \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$, o sistema é compatible determinado, xa que a súa única solución é

$$z = \frac{1}{m+2}, \quad y = z = \frac{1}{m+2}, \quad x = 1 - y - mz = \frac{1}{m+2}.$$

- Se $m = -2$, o sistema é incompatible, xa que a terceira ecuación queda $0 = -3$.

- Se $m = 1$, temos $\begin{cases} x + y + z = 1, \\ 0 = 0, \\ 0 = 0. \end{cases}$

O sistema é compatible indeterminado, xa que ten as seguintes infinitas solucións:

$$[z = \lambda, \quad y = \mu, \quad x = 1 - \mu - \lambda], \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

SOLUCIÓN ALTERNATIVA:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & m \\ 1 & m & 1 \\ m & 1 & 1 \end{pmatrix}, A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & m & 1 \\ 1 & m & 1 & 1 \\ m & 1 & 1 & 1 \end{array} \right), \text{rank } A \leq \text{rank } A^* \leq 3 \quad \forall m \in \mathbb{R}.$$

Como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & m \end{vmatrix} = (m - 1)$, é seguro que

se $m \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, entón $\text{rank } A \geq 2$ e $[\text{rank } A = 2 \Leftrightarrow \det A = 0]$.

É claro, por outra parte, que $\text{rank } A = 1$ cando $m = 1$, xa que quedan tres filas iguais, non nulas.

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ 1 & m & 1 \\ m & 1 & 1 \end{vmatrix} = m + m + m - m^3 - 1 - 1 = -m^3 + 3m - 2 = -(m^3 - 3m + 2).$$

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 0 & -3 & 2 \\ 1 & & 1 & 1 & -2 \\ \hline & 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}, \text{ de onde } m^3 - 3m + 2 = (m - 1)(m^2 + m - 2).$$

$$m^2 + m - 2 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} \Leftrightarrow m \in \{-2, 1\}.$$

$$m^2 + m - 2 = (m + 2)(m - 1).$$

$$\det A = -(m^3 - 3m + 2) = -(m + 2)(m - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow m \in \{-2, 1\}.$$

Discusión:

- Caso $m \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$: $\text{rank } A = \text{rank } A^* = 3 = n.^\circ$ de incógnitas, polo que o sistema é compatible determinado.
- Caso $m = -2$: $\text{rank } A = 2$ e $A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right)$. Ao ser $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 - 2 + 1 - 4 - 1 - 1 = -9 \neq 0$, tense que $\text{rank } A^* = 3 > \text{rank } A$, situación na que o sistema é incompatible.
- Caso $m = 1$: $\text{rank } A = 1$ e $A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right)$. Como $\text{rank } A^* = 1 = \text{rank } A < 3 = n.^\circ$ de incógnitas, o sistema é compatible indeterminado.

$$3.1. f(x) = \begin{cases} kx^2 + 2x & \text{se } x \leq 1, \\ x^2 - m & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

3.1.1.

Continuidade:

$$f(1) = k + 2, \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (kx^2 + 2x) = k + 2, \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 - m) = 1 - m.$$

$$k + 2 = 1 - m \Leftrightarrow k + m = -1.$$

Logo f é continua en $x = 1$ se, e só se, $k + m = -1$.

3.1.2.

Derivabilidade:

É necesario que $k + m = -1$, co cal $m = -k - 1$ e, polo tanto, $f(x) = \begin{cases} kx^2 + 2x & \text{se } x \leq 1, \\ x^2 + k + 1 & \text{se } x > 1. \end{cases}$

$$f'(x) = \begin{cases} 2kx + 2 & \text{se } x < 1, \\ 2x & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (2kx + 2) = 2k + 2, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (2x) = 2.$$

$$2k + 2 = 2 \Leftrightarrow k = 0.$$

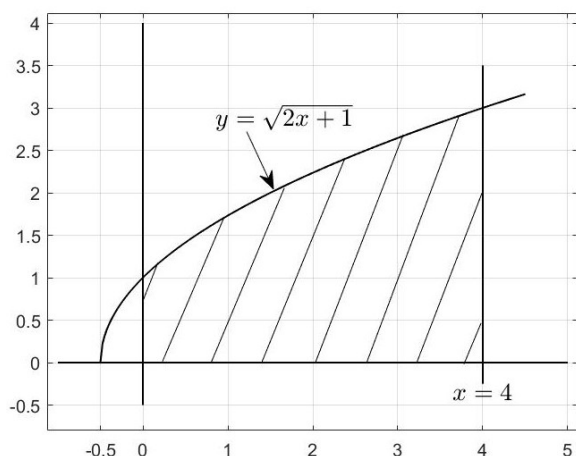
Logo f é derivable en $x = 1$ se, e só se, $k = 0$ e $m = -k - 1 = -1$.

3.2.

$f(x) = \sqrt{2x+1}$. Como $[2x+1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1/2]$, $\text{Dom } f = [-1/2, \infty)$.

Para o debuxo, pódese partir de que $y^2 = 2x+1$ é a ecuación dunha parábola ou razoalo como segue:

- $f(-1/2) = 0$, $f(0) = 1$, $f(4) = 3$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$.
- $f'(x) = \frac{2}{2\sqrt{2x+1}} = \frac{1}{\sqrt{2x+1}} > 0 \forall x \in (-1/2, \infty)$, polo que f é crecente en $(-1/2, \infty)$.
- $f''(x) = \left((2x+1)^{-\frac{1}{2}}\right)' = -\frac{1}{2}(2x+1)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2 = \frac{-1}{\sqrt{(2x+1)^3}} < 0 \forall x \in (-1/2, \infty)$, polo que f é cóncava en $(-1/2, \infty)$.



Facendo o cambio $z = 2x+1$ ($dz = 2 dx$), tense

$$\int \sqrt{2x+1} dx = \frac{1}{2} \int \sqrt{z} dz = \frac{1}{2} \int z^{\frac{1}{2}} dz = \frac{1}{2} \frac{z^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{1}{2} \frac{2}{3} z^{\frac{3}{2}} + C = \frac{1}{3} \sqrt{(2x+1)^3} + C.$$

$$A = \int_0^4 \sqrt{2x+1} dx = \frac{1}{3} \left[\sqrt{(2x+1)^3} \right]_0^4 = \frac{1}{3} (\sqrt{9^3} - 1) = \frac{1}{3} (27 - 1) = \frac{26}{3} = 8.\bar{6} \text{ u}^2,$$

onde u indica unidade de lonxitude.

4.1.

$$\pi_1: kx + y + \frac{1}{4}z + 2 = 0, \quad \pi_2: 3x + 4y + z + 3 = 0.$$

- π_1 e π_2 son paralelos se, e só se,

$$\frac{k}{3} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow 4k = 3 \Leftrightarrow k = \frac{3}{4}.$$

- Posto que

$$\vec{n}_{\pi_1} \cdot \vec{n}_{\pi_2} = \begin{pmatrix} k \\ 1 \\ 1/4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = 3k + 4 + \frac{1}{4} = \frac{12k + 16 + 1}{4} = \frac{12k + 17}{4},$$

conclúese que π_1 e π_2 son perpendiculares se, e só se,

$$12k + 17 = 0 \Leftrightarrow k = -\frac{17}{12}.$$

4.2

$$P(0,1,0), \quad r: (x, y, z) = (2, 0, 3) + \lambda(1, 2, 3), \lambda \in \mathbb{R}.$$

4.2.1.

Ecuación continua da recta s que é paralela a r e pasa por P :

$\vec{d}_s = \vec{d}_r(1, 2, 3)$ é vector director de s . Tendo en conta que s pasa por $P(0, 1, 0)$, obtense a seguinte ecuación continua:

$$\frac{x}{1} = \frac{y - 1}{2} = \frac{z}{3}.$$

4.2.2.

Ecuación implícita ou xeral do plano π que pasa por P e é perpendicular a r :

$\vec{n}_\pi = \vec{d}_r(1, 2, 3)$ é normal a π . Como ademais π pasa por $P(0, 1, 0)$, tense

$$\pi: x + 2(y - 1) + 3z = 0 \Leftrightarrow \pi: x + 2y + 3z - 2 = 0.$$

O exame consta de **4 preguntas de resposta obrigatoria, puntuadas cada unha con 2,5 puntos**: a primeira sen apartados optativos e as tres seguintes con posibilidade de elección entre apartados.

PREGUNTA 1. ESTATÍSTICA E PROBABILIDADE. (2,5 puntos)

CONTEXTO

Nos últimos anos, hai unha tendencia que segue en aumento: empregar calzado deportivo non unicamente para realizar actividade física, senón como calzado de uso diario. Os motivos principais son a súa versatilidade e comodidade, xa que poden combinarse con case calquera vestimenta ao mesmo tempo que permiten realizar movementos naturais.

Antón é un apaixonado deste tipo de calzado, do que ten 60 pares, gardando cada par na súa correspondente caixa. O 80% son zapatillas tradicionais e o 20% zapatillas de deseño. Entre as zapatillas de deseño, o 75% están en bo estado, pero só o 50% das zapatillas tradicionais están en bo estado. Un día que se ergueu co tempo xusto, para non chegar tarde ao traballo, colleu ao azar unha caixa e calzou as zapatillas desa caixa.

Responda estes tres apartados: 1.1., 1.2. e 1.3.

- 1.1.** Cal é a probabilidade de que Antón vaia calzado con zapatillas tradicionais ou zapatillas en bo estado?
- 1.2.** Ao saír do traballo, Antón decide ir ao cine con dous amigos. Antón non quere levar calzadas zapatillas que non estean en bo estado nin zapatillas tradicionais, cal sería a probabilidade de que non teña que pasar pola súa casa a cambiar as zapatillas?
- 1.3.** Antón ten 8 pares de zapatillas tradicionais de cor branca. Sabendo que se se escolle ao azar unha caixa das súas zapatillas os sucesos “ser brancas” e “ser de deseño” son sucesos independentes, cantos pares de zapatillas brancas de deseño ten Antón?

PREGUNTA 2. NÚMEROS E ÁLXEBA. (2,5 puntos)

Responda un destes dous apartados: 2.1. ou 2.2.

2.1. Dadas as matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & k \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2.1.1. Que condición ten que cumprir k para que A sexa invertible? Calcule A^{-1} cando sexa posible.

2.1.2. Para $k = 0$, calcule a matriz X que satisfai a igualdade $AX - A = B^2 + A^T$ sendo A^T a trasposta de A .

2.2. Discuta, segundo os valores do parámetro m , o sistema
$$\begin{cases} x + my + z = m, \\ x + (3-m)z = 2m, \\ my + 2z = 3m. \end{cases}$$

PREGUNTA 3. ANÁLISE. (2,5 puntos)

Responda un destes dous apartados: 3.1. ou 3.2.

3.1. Responda as dúas cuestións seguintes:

3.1.1. Enuncie o teorema do valor medio do cálculo diferencial.

3.1.2. Calcule $\int e^x \cos 3x dx$.

3.2. Dada a función $f(x) = \begin{cases} xe^{4x} & \text{se } x < 0 \\ \frac{\ln(1+x)}{1+x} & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$, pídese responder ás seguintes cuestións:

3.2.1. Estude a continuidade da función $f(x)$ en $x = 0$.

3.2.2. Estude a derivabilidade da función $f(x)$ en $x = 0$.

3.2.3. Calcule a ecuación da recta tanxente á curva $f(x)$ en $x = -1$.

PREGUNTA 4. XEOMETRÍA. (2,5 puntos)

Responda un destes dous apartados: 4.1. ou 4.2.

4.1. Considérense os planos $\pi: 2x + 3y + z + 1 = 0$ e $\pi': x + z - 1 = 0$ e os puntos $A(2,1,0)$ e $B(-1,-2,3)$.

4.1.1. Calcule a distancia do punto A ao plano paralelo a π que pasa por B .

4.1.2. Obteña as ecuacións paramétricas da recta intersección dos planos π e π' .

4.2. Dadas as rectas $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-1}{1}$ e $s: \frac{x-2}{4} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-1}{2}$.

4.2.1. Calcule a posición relativa das rectas r e s .

4.2.2. Obteña a ecuación do plano que contén ás rectas r e s .

El examen consta de **4 preguntas de respuesta obligatoria, puntuadas cada una con 2,5 puntos**: la primera sin apartados optativos y las tres siguientes con posibilidad de elección entre apartados.

PREGUNTA 1. ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD. (2,5 puntos)

CONTEXTO

En los últimos años, hay una tendencia que sigue en aumento: emplear calzado deportivo no únicamente para realizar actividad física, sino como calzado de uso diario. Los motivos principales son su versatilidad y comodidad, ya que pueden combinarse con casi cualquier atuendo al mismo tiempo que permiten realizar movimientos naturales.

Antón es un apasionado de este tipo de calzado, del que tiene 60 pares, guardando cada par en su correspondiente caja. El 80% son zapatillas tradicionales y el 20% zapatillas de diseño. Entre las zapatillas de diseño, el 75% están en buen estado, pero solo el 50% de las zapatillas tradicionales están en buen estado. Un día que se levantó con el tiempo justo, para no llegar tarde al trabajo, cogió al azar una caja y se calzó las zapatillas de esa caja.

Responda estos tres apartados: 1.1., 1.2. y 1.3.

- 1.1.** ¿Cuál es la probabilidad de que Antón vaya calzado con zapatillas tradicionales o zapatillas en buen estado?
- 1.2.** Al salir del trabajo, Antón decide ir al cine con dos amigos. Antón no quiere llevar calzadas zapatillas que no estén en buen estado ni zapatillas tradicionales, ¿cuál sería la probabilidad de que no tenga que pasar por su casa a cambiar las zapatillas?
- 1.3.** Antón tiene 8 pares de zapatillas tradicionales de color blanco. Sabiendo que al escoger al azar una caja de sus zapatillas los sucesos “ser blancas” y “ser de diseño” son sucesos independientes, ¿cuántos pares de zapatillas blancas de diseño tiene Antón?

PREGUNTA 2. NÚMEROS Y ÁLGEBRA. (2,5 puntos)

Responda uno de estos dos apartados: 2.1. o 2.2.

2.1. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & k \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2.1.1. ¿Qué condición tiene que cumplir k para que A sea invertible? Calcule A^{-1} cuando sea posible.

2.1.2. Para $k = 0$, calcule la matriz X que satisfaga la igualdad $AX - A = B^2 + A^T$ siendo A^T la traspuesta de A .

2.2. Discuta, según los valores del parámetro m , el sistema
$$\begin{cases} x + my + z = m, \\ x + (3-m)z = 2m, \\ my + 2z = 3m. \end{cases}$$

PREGUNTA 3. ANÁLISIS. (2,5 puntos)

Responda uno de estos dos apartados: 3.1. o 3.2.

3.1. Responda a las dos cuestiones siguientes:

3.1.1. Enuncie el teorema del valor medio del cálculo diferencial.

3.1.2. Calcule $\int e^x \cos 3x dx$.

3.2. Dada la función $f(x) = \begin{cases} xe^{4x} & \text{si } x < 0 \\ \frac{\ln(1+x)}{1+x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$, se pide responder a las siguientes cuestiones:

3.2.1. Estudie la continuidad de la función $f(x)$ en $x = 0$.

3.2.2. Estudie la derivabilidad de la función $f(x)$ en $x = 0$.

3.2.3. Calcule la ecuación de la recta tangente a la curva $f(x)$ en $x = -1$.

PREGUNTA 4. GEOMETRÍA. (2,5 puntos)

Responda uno de estos dos apartados: 4.1. o 4.2.

4.1. Considérense los planos $\pi: 2x + 3y + z + 1 = 0$ y $\pi': x + z - 1 = 0$ y los puntos $A(2,1,0)$ y $B(-1,-2,3)$.

4.1.1. Calcule la distancia del punto A al plano paralelo a π que pasa por B .

4.1.2. Obtenga las ecuaciones paramétricas de la recta intersección de los planos π y π' .

4.2. Dadas las rectas $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-1}{1}$ y $s: \frac{x-2}{4} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-1}{2}$.

4.2.1. Calcule la posición relativa de las rectas r y s .

4.2.2. Obtenga la ecuación del plano que contiene a las rectas r y s .

1.

Antón ten 60 pares de zapatillas. Consideremos os seguintes sucesos:

T ="Zapatillas tradicionais", sendo $P(T) = 0,8$. Tería 48 pares de zapatillas tradicionais

D ="Zapatillas de deseño", sendo $P(D) = 0,2$. Tería 12 pares de zapatillas de deseño

B ="Zapatillas en bo estado", sendo $P(B|T) = 0,5$ e sendo $P(B|D) = 0,75$, polo que tamén temos que $P(\bar{B}|T) = 0,5$ e $P(\bar{B}|D) = 0,25$

1.1.

$$P(T \cup B) = P(T) + P(B) - P(T \cap B) = 0,8 + 0,55 - 0,4 = 0,95, \text{ xa que}$$

$$P(B) = P(T)P(B|T) + P(D)P(B|D) = 0,8 \times 0,5 + 0,2 \times 0,75 = 0,55$$

$$P(T \cap B) = P(T)P(B|T) = 0,8 \times 0,5 = 0,4$$

Outra forma sería a seguinte:

$$P(T \cup B) = 1 - P(\overline{T \cup B}) = 1 - P(\bar{T} \cap \bar{B}) = 1 - P(\bar{T}) \times P(\bar{B}|\bar{T}) = 1 - 0,2 \times 0,25 = 0,95$$

1.2.

Consideremos o seguinte suceso:

N ="Antón non ten que pasar por casa a cambiar as zapatillas", temos que

$$P(N) = P(D \cap B) = P(D)P(B|D) = 0,2 \times 0,75 = 0,15$$

Outra forma sería a seguinte:

$$\begin{aligned} P(N) &= 1 - P(\bar{N}) = 1 - P(\bar{D} \cup \bar{B}) = 1 - P(T \cup \bar{B}) = 1 - (P(T) + P(\bar{B}) - P(T \cap \bar{B})) = \\ &= 1 - (0,8 + 0,45 - P(T)P(\bar{B}|T)) = 1 - (0,8 + 0,45 - 0,8 \times 0,5) = 1 - 0,85 = 0,15 \end{aligned}$$

1.3.

Consideremos o seguinte suceso:

B ="As zapatillas son brancas", temos que calcular y ="zapatillas brancas de deseño". Coma os sucesos B e D son independentes temos que:

$$P(B \cap D) = \frac{y}{60} = P(B) \times P(D) = \frac{y+8}{60} \times 0,2 \rightarrow y = 0,2y + 1,6 \rightarrow y = 2$$

Outra forma sería a seguinte. Se B e D son independentes tamén o son B e T , polo que

$$P(B \cap T) = \frac{8}{60} = P(B) \times P(D) = P(B) \times \frac{48}{60} \rightarrow P(B) = \frac{1}{6}$$

Polo que habería un total de 10 pares de zapatillas brancas, como hai 8 pares de zapatillas brancas tradicionais, habería 2 pares de zapatillas brancas de deseño.

Outra forma sería a seguinte. Se B e D son independentes tamén o son B e T , e tamén se tería que:

$$P(B) = P(B|D) = P(B|T) = \frac{8}{48} = \frac{1}{6}$$

Polo que 1/6 das zapatillas de deseño son brancas e hai 12 pares de zapatillas de deseño, habería 2 pares de zapatillas brancas de deseño.

2.1.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & k \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2.1.1.

A é invertible se, e só se, $|A| \neq 0$. Neste caso,

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & k \end{vmatrix} = 4k + 2 - 1 - 4k = 1$$

Como é diferente de 0, existe inversa de A para calquera valor de k .

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} 4k-1 & 1-2k & -2 \\ -2k & k & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 4k-1 & -2k & 2 \\ 1-2k & k & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2.1.2.

Para temos que $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ e $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Da ecuación $AX - A = B^2 + A^T \Rightarrow X = A^{-1}(B^2 + A^T + A)$.

$$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B^2 + A^T + A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 4 & 9 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1}(B^2 + A^T + A) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 4 & 9 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2.2.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & m & 1 & m \\ 1 & 0 & 3-m & 2m \\ 0 & m & 2 & 3m \end{array}\right) \xrightarrow[F_3 - F_1]{F_2 \leftrightarrow F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & m & 1 & m \\ 0 & m & 2 & 3m \\ 0 & -m & 2-m & m \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 + F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & m & 1 & m \\ 0 & m & 2 & 3m \\ 0 & 0 & 4-m & 4m \end{array}\right).$$

Sistema triangular equivalente:
$$\begin{cases} x + my + z = m, \\ my + 2z = 3m, \\ (4-m)z = 4m. \end{cases}$$

Discusión:

- Se $m \in \mathbb{R} \setminus \{0,4\}$, o sistema é compatible determinado, xa que a súa única solución é

$$z = \frac{4m}{4-m}, \quad y = \frac{3m-2z}{m}, \quad x = m - z - my.$$

- Se $m = 0$, temos
$$\begin{cases} x + z = 0, \\ 2z = 0, \\ 4z = 0. \end{cases}$$

O sistema é compatible indeterminado, xa que ten as seguintes infinitas solucións:

$$[x = 0, \quad y = \lambda, \quad z = 0], \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

- Se $m = 4$, temos
$$\begin{cases} x + 4y + z = 4, \\ 4y + 2z = 12, \\ 0 = 16. \end{cases}$$

O sistema é incompatible, porque a terceira ecuación non pode cumprirse.

SOLUCIÓN ALTERNATIVA:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & m & 1 \\ 1 & 0 & 3-m \\ 0 & m & 2 \end{pmatrix}, A^* = \begin{pmatrix} m & m & 1 \\ 1 & 0 & 3-m \\ 0 & m & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{c} m \\ 2m \\ 3m \end{array}, \text{rank } A \leq \text{rank } A^* \leq 3 \quad \forall m \in \mathbb{R}.$$

Como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$ é seguro que $\text{rank } A \geq 2 \quad \forall m \in \mathbb{R}$ e que $[\text{rank } A = 2 \Leftrightarrow \det A = 0]$.

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & m & 1 \\ 1 & 0 & 3-m \\ 0 & m & 2 \end{vmatrix} = m - 2m - 3m + m^2 = m^2 - 4m = m(m-4) = 0 \Leftrightarrow m \in \{0,4\}.$$

Discusión:

- Caso $m \in \mathbb{R} \setminus \{0,4\}$: $\text{rank } A = \text{rank } A^* = 3 = \text{n.º de incógnitas}$, polo que o sistema é compatible determinado.
- Caso $m = 0$: $\text{rank } A = 2$ e $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array}$. Ao ser $\text{rank } A^* = 2 = \text{rank } A$, tense que o sistema é compatible indeterminado.
- Caso $m = 4$: $\text{rank } A = 2$ e $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} 4 \\ 8 \\ 12 \end{array}$. Ao ser $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 1 & 0 & 8 \\ 1 & 4 & 12 \end{vmatrix} = 16 - 32 - 48 \neq 0$, tense que $\text{rank } A^* = 3 > \text{rank } A$, situación na que o sistema é incompatible.

3.1.

3.1.1.

Teorema do valor medio: se $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é continua en $[a, b]$ e derivable en (a, b) , entón existe algún $c \in (a, b)$ tal que $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.

3.1.2.

Aplicando a fórmula de integración por partes con

$$\begin{aligned} u &= e^x, & du &= e^x dx \\ dv &= \cos 3x dx, & v &= \frac{1}{3} \sin 3x \end{aligned}$$

obtense

$$\int e^x \cos 3x dx = e^x \frac{1}{3} \sin 3x - \int \frac{1}{3} \sin 3x e^x dx$$

Aplicando de novo a fórmula de integración por partes con

$$\begin{aligned} u &= e^x, & du &= e^x dx \\ dv &= \sin 3x dx, & v &= -\frac{1}{3} \cos 3x \end{aligned}$$

obtemos na fórmula anterior que

$$\int \sin 3x e^x dx = -\frac{1}{3} \cos 3x e^x + \int \frac{1}{3} \cos 3x e^x dx,$$

e polo tanto

$$\int e^x \cos 3x dx = e^x \frac{1}{3} \sin 3x - \frac{1}{3} \left[-\frac{1}{3} \cos 3x e^x + \int \frac{1}{3} \cos 3x e^x dx \right],$$

co que

$$\frac{10}{9} \int e^x \cos 3x dx = e^x \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{9} \cos 3x e^x + C.$$

Finalmente,

$$\int e^x \cos 3x dx = \frac{e^x}{10} (3 \sin 3x + \cos 3x) + C.$$

Nota: chegaríamos ao mesmo resultado aplicando a fórmula de integración por partes con

$$\begin{aligned} u &= \cos 3x, & du &= -3 \sin 3x dx \\ dv &= e^x dx, & v &= e^x \end{aligned}$$

3.2.

$$f(x) = \begin{cases} xe^{4x} & \text{se } x < 0, \\ \frac{\ln(1+x)}{1+x} & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 4xe^{4x} + e^{4x} & \text{se } x < 0, \\ \frac{\frac{x+1}{x+1} \ln(1+x)}{(1+x)^2} & \text{se } x > 0. \end{cases} \quad \text{entón} \quad f'(x) = \begin{cases} e^{4x}(4x+1) & \text{se } x < 0, \\ \frac{1-\ln(1+x)}{(1+x)^2} & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

3.2.1.

Continuidade:

$$f(0) = \frac{\ln(1)}{1} = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} xe^{4x} = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+x)}{1+x} = 0$$

Logo f é continua en $x = 0$.

3.2.2.

Derivabilidade:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = 1$$

Logo f é derivable en $x = 0$.

3.2.3.

Temos que $f(-1) = (-1)e^{-4}$, e que $f'(-1) = e^{-4}(-4+1)$

Polo que a ecuación da recta tanxente a curva f en $x = -1$ é:

$$y + e^{-4} = e^{-4}(-3)(x+1) \Rightarrow y = -3e^{-4}x - 4e^{-4}$$

4.1.

Dados $\pi: 2x + 3y + z + 1 = 0$, $\pi': x + z - 1 = 0$, $A(2,1,0)$ e $B(-1,-2,3)$.

4.1.1. Distancia de A ao plano paralelo a π que pasa por B .

Coma $2(-1) + 3(-2) + 3 + 1 = 4 \neq 0$ temos que $B \notin \pi$.

A ecuación do plano paralelo a π que pasa por B é

$\pi'': 2x + 3y + z + k = 0$ de tal xeito que $B \in \pi''$

$$2(-1) + 3(-2) + 3 + k = 0 \Leftrightarrow k = 5,$$

polo tanto temos que calcular a distancia do punto $A(2,1,0)$ ao plano $\pi'': 2x + 3y + z + 5 = 0$.

$$d(A, \pi'') = \frac{2 \times 2 + 3 \times 1 + 5}{\sqrt{2^2 + 3^2 + 1^2}} = \frac{12}{\sqrt{14}} = 3,207.$$

4.1.2. Ecuacións paramétricas da recta intersección dos planos π e π'

Temos que $\begin{cases} z = -2x - 3y - 1 \\ z = 1 - x \end{cases}$

Polo que se $x = 1$, temos que $z = 0$ e $y = -1$ e obtemos un punto da recta $P(1, -1, 0)$

Polo que se $x = 0$, temos que $z = 1$ e $y = -\frac{2}{3}$ e obtemos outro punto da recta $Q(0, -\frac{2}{3}, 1)$

Deste xeito, obtemos o vector director da recta $\overrightarrow{QP} = \vec{d}_r(1, -\frac{1}{3}, -1)$, e as ecuacións paramétricas da recta intersección dos dous planos son:

$$r: \begin{cases} x = 1 + \lambda, \\ y = -1 - \frac{1}{3}\lambda, \\ z = -\lambda, \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

4.2

Partimos das rectas $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-1}{1}$ e $s: \frac{x-2}{4} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-1}{2}$

4.2.1.

Temos o punto $P(1,2,1)$ que pertence a r , coma $P \notin s$ temos que as rectas non son coincidentes. Se consideramos os vectores directores temos que $\frac{2}{4} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$, polo que as rectas son paralelas non coincidentes.

4.2.2.

O plano pedido pasa por $P(1,2,1)$ e un vector do plano é $\vec{d}_r(2, -1, 1)$. A partir dun punto $Q \in s$, $Q(2,1,1)$, e o punto $P \in r$, pódese obter outro vector director do plano $\overrightarrow{PQ}(1, -1, 0)$. Entón, a ecuación do plano pedido sería :

$$\pi: \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -2z + 2 + y - 2 + z - 1 + x - 1 =$$

$$= x + y - z - 2 = 0.$$