

MATEMÁTICAS

PROBLEMAS (ata 2 puntos cada problema):

- Discuta segundo o valor de m o sistema de ecuacións lineais
$$\begin{cases} mx + y - z = 0, \\ (m-1)y + 2z = 1, \\ 2mx + 2y - z = 1. \end{cases}$$
- Obteña a ecuación do plano que pasa polos puntos $O(0,0,0)$, $P(1,0,1)$ e $Q(0,1,0)$. Logo, calcule a distancia dese plano ao punto $R(2,3,2)$.
- Diga, razoadamente, para que valores de a e b a función $f(x) = \begin{cases} ax + 1 & \text{se } x \leq 0, \\ x^3 + 3x^2 + b & \text{se } x > 0 \end{cases}$ é continua.
Logo, para que valores de a e b é derivable.

CUESTIÓNS (valórase con 1 punto a resposta correcta, 0 puntos se non se contesta e -0.5 puntos se a resposta é incorrecta):

- Se $AX + B = C$, onde A , X , B e C son matrices cadradas de orde maior que 1, con A invertible, entón
 - $X = (C - B)A^{-1}$.
 - $X = A^{-1}(C - B)$.
 - $X = (C - B)/A$.
- Os puntos $O(0,0,0)$, $P(1,0,1)$, $Q(a, 1,0)$ e $R(0,3,b)$
 - son coplanarios (é dicir, pertencen a un mesmo plano) soamente se $a = b = 0$.
 - son coplanarios se $b = -3a$.
 - Ningunha das anteriores afirmacións é certa.
- O valor do límite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin^2 x}$ é
 - $-1/2$.
 - 0.
 - $1/2$.
- A integral definida $\int_0^b e^x dx$
 - vale 1 se $b = \ln 2$.
 - vale 1 se $b = 1$.
 - non vale 1 para ningún valor de b .

MATEMÁTICAS

PROBLEMAS (hasta 2 puntos cada problema):

- Discuta según el valor de m el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} mx + y - z = 0, \\ (m-1)y + 2z = 1, \\ 2mx + 2y - z = 1. \end{cases}$$
- Obtenga la ecuación del plano que pasa por los puntos $O(0,0,0)$, $P(1,0,1)$ y $Q(0,1,0)$. Luego, calcule la distancia de ese plano al punto $R(2,3,2)$.
- Diga, razonadamente, para qué valores de a y b la función $f(x) = \begin{cases} ax + 1 & \text{si } x \leq 0, \\ x^3 + 3x^2 + b & \text{si } x > 0 \end{cases}$ es continua. Luego, para qué valores de a y b es derivable.

CUESTIONES (se valora con 1 punto la respuesta correcta, 0 puntos si no se contesta y -0.5 puntos si la respuesta es incorrecta):

- Si $AX + B = C$, donde A , X , B y C son matrices cuadradas de orden mayor que 1, con A invertible, entonces
 - $X = (C - B)A^{-1}$.
 - $X = A^{-1}(C - B)$.
 - $X = (C - B)/A$.
- Los puntos $O(0,0,0)$, $P(1,0,1)$, $Q(a, 1,0)$ y $R(0,3,b)$
 - son coplanarios (es decir, pertenecen a un mismo plano) solamente si $a = b = 0$.
 - son coplanarios si $b = -3a$.
 - Ninguna de las anteriores afirmaciones es cierta.
- El valor del límite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin^2 x}$ es
 - $-1/2$.
 - 0.
 - $1/2$.
- La integral definida $\int_0^b e^x dx$
 - vale 1 si $b = \ln 2$.
 - vale 1 si $b = 1$.
 - no vale 1 para ningún valor de b .

MATEMÁTICAS**CRITERIOS DE AVALIACIÓN****PROBLEMAS:**

1. Discutir o sistema: 2 puntos.
2. Obter a ecuación do plano e calcular a distancia: $1 + 1 = 2$ puntos.
3. Obter os valores de a e b para os que f é continua e derivable: $1 + 1 = 2$ puntos.

CUESTIONES:

1. Resposta correcta (b): 1 punto.
Resposta incorrecta: -0.5 puntos.
2. Resposta correcta (b): 1 punto.
Resposta incorrecta: -0.5 puntos.
3. Resposta correcta (c): 1 punto.
Resposta incorrecta: -0.5 puntos.
4. Resposta correcta (a): 1 punto.
Resposta incorrecta: -0.5 puntos.

MATEMÁTICAS

PROBLEMAS (ata 2 puntos cada problema):

- Discuta segundo o valor de m o sistema de ecuacións lineais
$$\begin{cases} mx + y - z = 0, \\ (m-1)y + 2z = 1, \\ 2mx + 2y - z = 1. \end{cases}$$
- Obteña a ecuación do plano que pasa polos puntos $O(0,0,0)$, $P(1,0,1)$ e $Q(0,1,0)$. Logo, calcule a distancia dese plano ao punto $R(2,3,2)$.
- Diga, razoadamente, para que valores de a e b a función $f(x) = \begin{cases} ax + 1 & \text{se } x \leq 0, \\ x^3 + 3x^2 + b & \text{se } x > 0 \end{cases}$ é continua. Logo, para que valores de a e b é derivable.

CUESTIÓNS (valórase con 1 punto a resposta correcta, 0 puntos se non se contesta e -0.5 puntos se a resposta é incorrecta):

- Se $AX + B = C$, onde A , X , B e C son matrices cadradas de orde maior que 1, con A invertible, entón
 - $X = (C - B)A^{-1}$.
 - $X = A^{-1}(C - B)$.
 - $X = (C - B)/A$.
- Os puntos $O(0,0,0)$, $P(1,0,1)$, $Q(a, 1,0)$ e $R(0,3,b)$
 - son coplanarios (é dicir, pertencen a un mesmo plano) soamente se $a = b = 0$.
 - son coplanarios se $b = -3a$.
 - Ningunha das anteriores afirmacións é certa.
- O valor do límite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin^2 x}$ é
 - $-1/2$.
 - 0.
 - $1/2$.
- A integral definida $\int_0^b e^x dx$
 - vale 1 se $b = \ln 2$.
 - vale 1 se $b = 1$.
 - non vale 1 para ningún valor de b .

MATEMÁTICAS

PROBLEMAS (hasta 2 puntos cada problema):

- Discuta según el valor de m el sistema de ecuaciones lineales
$$\begin{cases} mx + y - z = 0, \\ (m-1)y + 2z = 1, \\ 2mx + 2y - z = 1. \end{cases}$$
- Obtenga la ecuación del plano que pasa por los puntos $O(0,0,0)$, $P(1,0,1)$ y $Q(0,1,0)$. Luego, calcule la distancia de ese plano al punto $R(2,3,2)$.
- Diga, razonadamente, para qué valores de a y b la función $f(x) = \begin{cases} ax + 1 & \text{si } x \leq 0, \\ x^3 + 3x^2 + b & \text{si } x > 0 \end{cases}$ es continua. Luego, para qué valores de a y b es derivable.

CUESTIONES (se valora con 1 punto la respuesta correcta, 0 puntos si no se contesta y -0.5 puntos si la respuesta es incorrecta):

- Si $AX + B = C$, donde A , X , B y C son matrices cuadradas de orden mayor que 1, con A invertible, entonces
 - $X = (C - B)A^{-1}$.
 - $X = A^{-1}(C - B)$.
 - $X = (C - B)/A$.
- Los puntos $O(0,0,0)$, $P(1,0,1)$, $Q(a, 1,0)$ y $R(0,3, b)$
 - son coplanarios (es decir, pertenecen a un mismo plano) solamente si $a = b = 0$.
 - son coplanarios si $b = -3a$.
 - Ninguna de las anteriores afirmaciones es cierta.
- El valor del límite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin^2 x}$ es
 - $-1/2$.
 - 0.
 - $1/2$.
- La integral definida $\int_0^b e^x dx$
 - vale 1 si $b = \ln 2$.
 - vale 1 si $b = 1$.
 - no vale 1 para ningún valor de b .

1) Discuta según los valores de m :

$$\begin{cases} mx + y - z = 0, \\ (m-1)y + 2z = 1, \\ 2mx + 2y - z = 1. \end{cases}$$

Sol.:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} m & 1 & -1 & 0 \\ 0 & m-1 & 2 & 1 \\ 2m & 2 & -1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_3 - 2F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} m & 1 & -1 & 0 \\ 0 & m-1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

Sistema triangular equivalente:

$$\begin{cases} mx + y - z = 0 \\ (m-1)y + 2z = 1 \\ z = 1 \end{cases}$$

Discusión:

- Si $m \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$, la única solución del sistema es

$$\boxed{z = 1}, \quad \boxed{y = \frac{1-2z}{m-1} = \frac{-1}{m-1} = \frac{1}{1-m}},$$

$$\boxed{x = \frac{-y + z}{m} = \frac{\frac{1}{m-1} + 1}{m} = \frac{\frac{1+m-1}{m-1}}{m} = \frac{1}{m-1}}, \text{ conque en}$$

este caso el sistema es compatible determinado.

- Si $m=1$, $\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2z = 1 \\ z = 1 \end{cases}$ es incompatible (no tiene solución), ya que las ecuaciones 2.ª y 3.ª no pueden cumplirse a la vez.

- Si $m=0$, $\begin{cases} y - z = 0 \\ -y + 2z = 1 \\ \boxed{z = 1} \end{cases}$ es compatible indeterminado. Sus infinitas soluciones son $\boxed{x \in \mathbb{R} \text{ c.q.}, y=1, z=1.}$

2) Ecuación del plano que pasa por $O(0,0,0)$, $P(1,0,1)$ y $Q(0,1,0)$:

$\pi: Ax+By+Cz=D$, con $(A,B,C) = \vec{n}_\pi$ vector normal a π ,
y $D=0$ (ya que $O(0,0,0) \in \pi$)

$$\vec{u} = \vec{PO} = (1,0,1), \quad \vec{v} = \vec{QO} = (0,1,0)$$

$$\vec{n}_\pi = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \vec{k} = -\vec{i} + \vec{k} = (-1, 0, 1)$$

Luego $\pi: -x + z = 0$ o, equivalentemente, $\boxed{\pi: x - z = 0}$.

Distancia del punto $R(2,3,2)$ al plano π : como $R \in \pi$, $\boxed{d(R, \pi) = 0}$.

Si usamos la fórmula:

$$\boxed{d(R, \pi) = \frac{|A \cdot 2 + B \cdot 3 + C \cdot 2 - D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|2 - 2|}{\sqrt{2}} = 0}$$

$$3) f(x) = \begin{cases} ax+1 & \text{si } x \leq 0, \\ x^3+3x^2+b & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

$$f(0) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (ax+1) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^3+3x^2+b) = b.$$

Luego f es continua si $b = 1$ y $a \in \mathbb{R}$ cualquiera.

$$f'(x) = \begin{cases} a & \text{si } x < 0 \\ 3x^2+6x & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) &= a \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) &= 0 \end{aligned}$$

Luego f es derivable si $b = 1$ y $a = 0$.

↑
para ser derivable
ha de ser continua.

CUESTIÓN 1 $AX+B=C$, $AX=C-B$,

$$\boxed{b) X = A^{-1}(C-B).$$

CUESTIÓN 2 $\vec{PO} = (1, 0, 1)$, $\vec{QO} = (a, 1, 0)$, $\vec{RO} = (0, 3, b)$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ a & 1 & 0 \\ 0 & 3 & b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & b \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = b + 3a = 0 \Leftrightarrow b = -3a.$$

$$\boxed{b) \text{ son coplanarios si } b = -3a.}$$

CUESTIÓN 3 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2(\sin x)(\cos x)} = \frac{1}{2}$

$\frac{0}{0}$ L'Hôpital

$$\boxed{c) 1/2.}$$

CUESTIÓN 4 $\int_0^b e^x dx = e^x \Big|_0^b = e^b - 1 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{si } b = \ln 2}}{=} 2 - 1 = 1$

$$\boxed{a) \text{ vale 1 si } b = \ln 2}$$

