# MATEMÁTICAS II

O exame consta de 8 preguntas de 2 puntos, das que pode responder un **<u>MÁXIMO DE 5</u>**, combinadas como queira. Se responde máis preguntas das permitidas, **só serán corrixidas as 5 primeiras respondidas**.

**1. Números e Álxebra:**
Despexe a matriz $X$ da ecuación $XA = A + XB$, se $A$ e $B$ son matrices cadradas tales que $A - B$ é invertible. Logo, calcule $X$ se $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $B = (A^2 - A - I)^{-1}$, onde $I$ é a matriz identidade de orde 2.

**2. Números e Álxebra:**
Discuta, segundo os valores de $m$, o sistema $\begin{cases} mx + (2+m^2)y = 1+m, \\ my - z = 1, \\ mx + 2y + (2m-4)z = 5. \end{cases}$

**3. Análise:**
a) Se $f(x) = ae^x + b$, diga que valores deben ter $a$ e $b$ para que se cumpran $f(0) = 0$ e $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = 3$.
b) Estude se a función $f(x) = x + \sin x$ ten extremos ou puntos de inflexión no intervalo $(0,2\pi)$, diga onde están en caso de que existan e esboce a gráfica de $f$ nese intervalo.

**4. Análise:**
Calcule a área da rexión determinada polas desigualdades $x \geq 1$, $y \leq x$ e $y \geq f(x)$, con $f(x) = x \ln x$. Faga un esbozo gráfico da rexión. **Nota**: $\ln x$ é o logaritmo neperiano de $x$.

**5. Xeometría:**
a) Obteña as ecuacións paramétricas da recta $r$ que pasa polos puntos $P(2,-1,0)$ e $Q(3,0,0)$ e a ecuación implícita ou xeral do plano $\pi$ que pasa polo punto $R(0,4,-2)$ e é paralelo aos vectores $\vec{u}(1,0,-1)$ e $\vec{v}(2,1,-2)$.
b) Calcule o ángulo agudo que forma a recta $r: \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{0}$ co plano $\pi: x + z + 2 = 0$.

**6. Xeometría:**
a) Calcule o punto simétrico de $P(2,-1,0)$ con respecto ao plano $\pi: x + z + 2 = 0$.
b) Estude a posición relativa das rectas $r: \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{0}$ e $s: \frac{x-2}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z+1}{-1}$. Se se cortan, calcule o punto de corte.

**7. Estatística e Probabilidade:**
a) Calcule as catro probabilidades $P(A)$, $P(A \cap \bar{B})$, $P(A|B)$ e $P(B|A)$ sabendo que $P(A \cup B) = 0.8$, $P(A \cap B) = 0.2$ e $P(A) = 2P(B)$. **Nota**: $\bar{B}$ é o suceso contrario ou complementario de $B$.
b) Nun coñecido congreso, o 60% dos científicos inscritos participan *online* e o resto asisten en persoa. Ademais, o 65% dos inscritos son europeos e o 80% dos que asisten en persoa tamén o son. Se se elixe ao azar a un dos inscritos, calcule a probabilidade de que sexa europeo e, á vez, participe *online*; logo, a de que participe *online* se se sabe que é europeo.

**8. Estatística e Probabilidade:**
a) Nunha certa zona húmida, a probabilidade de que un cabezolo chegue a ra adulta é do 2%. Se se escollen ao azar 2500 deses cabezolos, cal é a probabilidade de que polo menos 55 deles cheguen a ras adultas?
b) Para conceder bolsas de estudo, un organismo valora os méritos presentados e asigna a cada candidato unha puntuación que indica máis méritos canto maior é o seu valor. Este ano, a puntuación segue unha distribución normal de media 100 e desviación típica 20, e tómase a decisión de conceder a bolsa ao 5% mellor do conxunto de solicitantes. Que puntuación é preciso alcanzar para obter a bolsa?

# MATEMÁTICAS II

El examen consta de 8 preguntas de 2 puntos, de las que puede responder un **MÁXIMO DE 5**, combinadas como quiera. Si responde más preguntas de las permitidas, **solo serán corregidas las 5 primeras respondidas.**

**1. Números y Álgebra:**
Despeje la matriz $X$ de la ecuación $XA = A + XB$, si $A$ y $B$ son matrices cuadradas tales que $A - B$ es invertible. Luego, calcule $X$ si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = (A^2 - A - I)^{-1}$, donde $I$ es la matriz identidad de orden 2.

**2. Números y Álgebra:**
Discuta, según los valores de $m$, el sistema $\begin{cases} mx + (2+m^2)y = 1+m, \\ my - z = 1, \\ mx + 2y + (2m-4)z = 5. \end{cases}$

**3. Análisis:**
a) Si $f(x) = ae^x + b$, diga qué valores deben tener $a$ y $b$ para que se cumplan $f(0) = 0$ y $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = 3$.
b) Estudie si la función $f(x) = x + \sin x$ tiene extremos o puntos de inflexión en el intervalo $(0, 2\pi)$, diga dónde están en caso de que existan y esboce la gráfica de $f$ en ese intervalo.

**4. Análisis:**
Calcule el área de la región determinada por las desigualdades $x \geq 1$, $y \leq x$ e $y \geq f(x)$, con $f(x) = x \ln x$. Haga un esbozo gráfico de la región. **Nota**: $\ln x$ es el logaritmo neperiano de $x$.

**5. Geometría:**
a) Obtenga las ecuaciones paramétricas de la recta $r$ que pasa por los puntos $P(2,-1,0)$ y $Q(3,0,0)$ y la ecuación implícita o general del plano $\pi$ que pasa por el punto $R(0,4,-2)$ y es paralelo a los vectores $\vec{u}(1,0,-1)$ y $\vec{v}(2,1,-2)$.
b) Calcule el ángulo agudo que forma la recta $r: \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{0}$ con el plano $\pi: x + z + 2 = 0$.

**6. Geometría:**
a) Calcule el punto simétrico de $P(2,-1,0)$ con respecto al plano $\pi: x + z + 2 = 0$.
b) Estudie la posición relativa de las rectas $r: \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{0}$ y $s: \frac{x-2}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z+1}{-1}$. Si se cortan, calcule el punto de corte.

**7. Estadística y Probabilidad:**
a) Calcule las cuatro probabilidades $P(A)$, $P(A \cap \bar{B})$, $P(A|B)$ y $P(B|A)$ sabiendo que $P(A \cup B) = 0.8$, $P(A \cap B) = 0.2$ y $P(A) = 2P(B)$. **Nota**: $\bar{B}$ es el suceso contrario o complementario de $B$.
b) En un conocido congreso, el 60% de los científicos inscritos participan *online* y el resto asisten en persona. Además, el 65% de los inscritos son europeos y el 80% de los que asisten en persona también lo son. Si se elige al azar a uno de los inscritos, calcule la probabilidad de que sea europeo y, a la vez, participe *online*; luego, la de que participe *online* si se sabe que es europeo.

**8. Estadística y Probabilidad:**
a) En un cierto humedal, la probabilidad de que un renacuajo llegue a rana adulta es del 2%. Si se escogen al azar 2500 de esos renacuajos, ¿cuál es la probabilidad de que al menos 55 de ellos lleguen a ranas adultas?
b) Para conceder becas de estudio, un organismo valora los méritos presentados y asigna a cada candidato una puntuación que indica más méritos cuanto mayor es su valor. Este año, la puntuación sigue una distribución normal de media 100 y desviación típica 20, y se toma la decisión de conceder la beca al 5% mejor del conjunto de solicitantes. ¿Qué puntuación es preciso alcanzar para obtener la beca?

# MATEMÁTICAS II

O exame consta de 8 preguntas de 2 puntos, das que pode responder un **MÁXIMO DE 5**, combinadas como queira. Se responde máis preguntas das permitidas, **só serán corrixidas as 5 primeiras respondidas**.

**1. Números e Álxebra:**

a) Calcule $A$ se $(AB)^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

b) Se $A = \begin{pmatrix} 3 & x \\ y & z \end{pmatrix}$ é invertible, obteña os valores de $x$, $y$ e $z$ sabendo que $\det(A - 3I) = 0$, que $y \neq 0$ e que $(3z)A^{-1} + I = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$. Enténdase que $I$ é a matriz identidade.

**2. Números e Álxebra:**

Discuta, segundo os valores do parámetro $m$, o sistema $\begin{cases} (m+1)x + z = 1, \\ (m+1)x + y + z = m+1, \\ (m+1)x + my + (m-1)z = m. \end{cases}$

**3. Análise:**

a) Enuncie os teoremas de Rolle e do valor medio do cálculo diferencial.

b) Explique se $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ está ou non nas hipóteses do teorema do valor medio do cálculo diferencial. En caso de que o estea, calcule un valor $c$ para o cal se cumpra a tese dese teorema.

**4. Análise:**

a) Calcule mediante cambio de variable as integrais $\int (\sin x)^5 \cos x \, dx$ e $\int (\ln x)/x \, dx$.

b) Calcule $\int (\ln x)/x \, dx$ empregando o método de integración por partes. Logo, obteña algún valor de $B$ tal que $\int_{e}^{B} (\ln x)/x \, dx = 3/2$.

**5. Xeometría:**

a) Considérense o plano $\pi\colon ax + y + z = 1$, onde $a$ é un parámetro real e a recta $r\colon \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{3}$. Estude a posición relativa de $\pi$ e $r$ en función de $a$ e obteña o valor de $a$ que fai que $\pi$ e $r$ sexan perpendiculares. Por último, razoe se $r$ pode estar contida en $\pi$ ou non.

b) Se $\pi\colon -3x + y + z = 1$, diga que valor ten que tomar $b$ para que $r\colon \frac{x-1}{2} = \frac{y-b}{3} = \frac{z+1}{3}$ estea contida en $\pi$.

**6. Xeometría:**

Considérese o plano $\pi\colon 2x - y + z = 1$. Pídese:

a) Calcular a distancia de $\pi$ ao punto de corte das rectas $r_1\colon \begin{cases} x = 2 + \lambda, \\ y = 0, \\ z = -1 - \lambda \end{cases}$ e $r_2\colon \begin{cases} x = \mu, \\ y = -1 + \mu, \\ z = 0, \end{cases}$ $(\lambda, \mu \in \mathbb{R})$.

b) Obter o punto simétrico de $P(1,0,0)$ con respecto a $\pi$.

**7. Estatística e Probabilidade:**

a) Calcule $P(A|B)$ se $B \subset A$. Logo, se $P(C) = 0.5$ e $P(D) = 0.6$, explique se $C$ e $D$ poden ser incompatibles. Por último, obteña $P(E \cup F)$ e $P(E \cap \bar{F})$ se $E$ e $F$ son independentes, $P(E) = 0.3$ e $P(F) = 0.2$.

b) Tírase un dado sete veces. Calcule a probabilidade de que saian exactamente dous seises.

**8. Estatística e Probabilidade:**

Para un determinado grupo de pacientes, a tensión arterial sistólica (medida en mmHg) segue unha distribución normal de media 123.6 e desviación típica 17.8. Calcule a probabilidade de que un paciente elixido ao azar teña unha tensión comprendida entre 100 e 120 mmHg. Logo, obteña o valor da tensión que é superado polo 67% dos pacientes.

# MATEMÁTICAS II

El examen consta de 8 preguntas de 2 puntos, de las que puede responder un **MÁXIMO DE 5**, combinadas como quiera. Si responde más preguntas de las permitidas, **solo serán corregidas las 5 primeras respondidas.**

**1. Números y Álgebra:**

a) Calcule $A$ si $(AB)^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

b) Si $A = \begin{pmatrix} 3 & x \\ y & z \end{pmatrix}$ es invertible, obtenga los valores de $x$, $y$ y $z$ sabiendo que $\det(A - 3I) = 0$, que $y \neq 0$ y que $(3z)A^{-1} + I = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$. Entiéndase que $I$ es la matriz identidad.

**2. Números y Álgebra:**

Discuta, según los valores del parámetro $m$, el sistema $\begin{cases} (m+1)x & & & + & z & = & 1, \\ (m+1)x & + & y & + & z & = & m+1, \\ (m+1)x & + & my & + & (m-1)z & = & m. \end{cases}$

**3. Análisis:**

a) Enuncie los teoremas de Rolle y del valor medio del cálculo diferencial.

b) Explique si $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, está o no en las hipótesis del teorema del valor medio del cálculo diferencial. En caso de que lo esté, calcule un valor $c$ para el cual se cumpla la tesis de ese teorema.

**4. Análisis:**

a) Calcule mediante cambio de variable las integrales $\int (\sin x)^5 \cos x \, dx$ y $\int (\ln x)/x \, dx$.

b) Calcule $\int (\ln x)/x \, dx$ empleando el método de integración por partes. Luego, obtenga algún valor de $B$ tal que $\int_{\mathrm{e}}^{B} (\ln x)/x \, dx = 3/2$.

**5. Geometría:**

a) Considérense el plano $\pi\colon ax + y + z = 1$, donde $a$ es un parámetro real, y la recta $r\colon \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{3}$. Estudie la posición relativa de $\pi$ y $r$ en función de $a$ y obtenga el valor de $a$ que hace que $\pi$ y $r$ sean perpendiculares. Por último, razone si $r$ puede estar contenida en $\pi$ o no.

b) Si $\pi\colon -3x + y + z = 1$, diga qué valor tiene que tomar $b$ para que $r\colon \frac{x-1}{2} = \frac{y-b}{3} = \frac{z+1}{3}$ esté contenida en $\pi$.

**6. Geometría:**

Considérese el plano $\pi\colon 2x - y + z = 1$. Se pide:

a) Calcular la distancia de $\pi$ al punto de corte de las rectas $r_1\colon \begin{cases} x = 2 + \lambda, \\ y = 0, \\ z = -1 - \lambda \end{cases}$ y $r_2\colon \begin{cases} x = \mu, \\ y = -1 + \mu, \\ z = 0, \end{cases}$ $(\lambda, \mu \in \mathbb{R})$.

b) Obtener el punto simétrico de $P(1,0,0)$ con respecto a $\pi$.

**7. Estadística y Probabilidad:**

a) Calcule $P(A|B)$ si $B \subset A$. Luego, si $P(C) = 0.5$ y $P(D) = 0.6$, explique si $C$ y $D$ pueden ser incompatibles. Por último, obtenga $P(E \cup F)$ y $P(E \cap \bar{F})$ si $E$ y $F$ son independientes, $P(E) = 0.3$ y $P(F) = 0.2$.

b) Se tira un dado siete veces. Calcule la probabilidad de que salgan exactamente dos seises.

**8. Estadística y Probabilidad:**

Para un determinado grupo de pacientes, la tensión arterial sistólica (medida en mmHg) sigue una distribución normal de media 123.6 y desviación típica 17.8. Calcule la probabilidad de que un paciente elegido al azar tenga una tensión comprendida entre 100 y 120 mmHg. Luego, obtenga el valor de la tensión que es superado por el 67% de los pacientes.

ABAU 2023

CONVOCATORIA ORDINARIA

# CRITERIOS DE AVALIACIÓN

## *MATEMÁTICAS II*

**(Cód. 20)**

Só puntúan cinco das oito preguntas.

As puntuacións parciais que seguen están ligadas a un determinado xeito de resolver os exercicios, pero, nalgúns casos, pode haber outras formas correctas de solucionalos.

1. **Números e Álxebra** (2 puntos)

   **0.75** por despexar $X$, **0.5** por chegar a $B = -I$, **0.5** por calcular $(A - B)^{-1}$, **0.25** por concluír.

2. **Números e Álxebra** (2 puntos)

   **0.5** por resolver $\det A = 0$, **0.5** polo estudo de cada un dos tres casos.

   Se se fai por Gauss, **1.25** por chegar ao sistema triangular equivalente, **0.25** por cada un dos tres casos.

3. **Análise** (2 puntos)

   a) **1** punto:

   **0.25** por ver que $b = -a$, **0.75** por chegar a $a = 3$.

   b) **1** punto:

   **0.5** por comprobar que non hai extremos e que hai un punto de inflexión en $x = \pi$, **0.5** por esbozar a gráfica.

4. **Análise** (2 puntos)

   **0.5** pola formulación, **0.5** polo cálculo da primitiva, **0.5** polo resultado, **0.5** polo debuxo da rexión.

5. **Xeometría** (2 puntos)

   a) **1** punto: **0.5** polas ecuacións da recta, **0.5** pola ecuación do plano.

b) **1** punto.

6. **Xeometría** (2 puntos)
   a) **1** punto: **0.25** pola recta perpendicular, **0.25** polo punto de corte, **0.5** polo cálculo do punto simétrico.

   b) **1** punto: **0.5** pola posición relativa, **0.5** polo punto de corte.

7. **Estatística e Probabilidade** (2 puntos)
   a) **1** punto: **0.25** por cada unha das catro probabilidades que se piden.
   b) **1** punto: **0.5** por cada unha das dúas probabilidades que se piden.

8. **Estatística e Probabilidade** (2 puntos)
   a) **1** punto:

   **0.5** por chegar a $P(X \geq 55) \approx P(\tilde{X} \geq 54.5)$, con $\tilde{X} \to N(50,7)$,

   **0.25** por chegar a $P(Z \geq 0.64)$,

   **0.25** polo resultado.

   b) **1** punto:

   **0.25** pola formulación,

   **0.25** por chegar a $P\left(Z < \frac{x-100}{20}\right) = 0.95$,

   **0.5** pola obtención de $x$.

ABAU 2023

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

# CRITERIOS DE AVALIACIÓN

## *MATEMÁTICAS II*

**(Cód. 20)**

Só puntúan cinco das oito preguntas.

1. **Números e Álxebra** (2 puntos)

   a) **0.75** puntos: **0.25** por despexar $A$, **0.25** por calcular $B^{-1}$, **0.25** por calcular $A$.

   Se se pensa en $A$ como unha matriz incógnita $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$: **0.5** por chegar ao sistema, **0.25** pola solución.

   b) **1.25** puntos: **0.25** polo cálculo de $\det(A - 3I)$, **0.25** por deducir que $x = 0$, **0.25** por calcular $A^{-1}$, **0.25** por chegar a $(3z)A^{-1} + I = \begin{pmatrix} z+1 & 0 \\ -y & 4 \end{pmatrix}$, **0.25** pola conclusión.

2. **Números e Álxebra** (2 puntos)

   **0.5** por resolver $\det A = 0$, **0.5** por cada un dos tres casos.

   Se se fai por Gauss, **1.25** por chegar ao sistema triangular equivalente, **0.25** por cada un dos tres casos.

3. **Análise** (2 puntos)

   a) **1** punto: **0.5** polo teorema de Rolle e **0.5** polo teorema do valor medio.

   b) **1** punto: **0.5** por dicir que a función é continua no cerrado e derivable no aberto e **0.5** por obter o valor de $c$.

4. **Análise** (2 puntos)

   a) **1** punto: **0.5** por cada unha das dúas integrais, feitas mediante cambio de variable.

   b) **1** punto: **0.5** pola primeira parte (integración por partes); **0.5** pola segunda parte, co seguinte reparto: **0.25** por chegar a $\int_{e}^{B} (\ln x)/x \, dx = (1/2)(\ln B)^2 - 1/2$, **0.25** polo cálculo de $B$.

5. **Xeometría** (2 puntos)
   a) **1.5** puntos: **0.5** pola posición relativa, **0.5** polo valor de $a$ que fai que $r \perp \pi$, **0.5** por razoar que $r$ non pode estar contida en $\pi$.
   b) **0.5** puntos.

6. **Xeometría** (2 puntos)
   a) **1** punto: **0.5** polo punto de corte, **0.5** polo cálculo da distancia.

   b) **1** punto: **0.25** polas ecuacións da recta $r$ perpendicular a $\pi$ que pasa por $P$, **0.25** pola obtención de $Q = r \cap \pi$, **0.5** por determinar o punto simétrico.

7. **Estatística e Probabilidade** (2 puntos)
   a) **1** punto: **0.25** por obter $P(A|B)$, **0.25** por razoar que $C$ e $D$ non poden ser incompatibles, **0.25** por calcular $P(E \cup F)$ e **0.25** por calcular $P(E \cap \bar{F})$.
   b) **1** punto: **0.25** pola definición da variable e por dicir que é binomial, **0.25** pola fórmula da binomial, **0.5** polo resultado.

8. **Estatística e Probabilidade** (2 puntos)

   **1** punto pola primeira parte, repartido do seguinte xeito: **0.25** por tipificar, **0.25** por chegar a $P(-1.33 \leq Z \leq -0.20)$, **0.25** por chegar a $P(Z \leq 1.33) - P(Z \leq 0.20)$, **0.25** polo cálculo da probabilidade pedida.

   **1** punto pola segunda parte, repartido do seguinte xeito: **0.25** pola formulación do problema, **0.5** por chegar a $P\left(Z < \frac{123.6-t}{17.8}\right) = 0.67$, **0.25** pola obtención de $t$.

# MATEMÁTICAS II

O exame consta de 8 preguntas de 2 puntos, das que pode responder un **MÁXIMO DE 5**, combinadas como queira. Se responde máis preguntas das permitidas, **só serán corrixidas as 5 primeiras respondidas**.

**1. Números e Álxebra:**
Despexe a matriz $X$ da ecuación $XA = A + XB$, se $A$ e $B$ son matrices cadradas tales que $A - B$ é invertible. Logo, calcule $X$ se $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $B = (A^2 - A - I)^{-1}$, onde $I$ é a matriz identidade de orde 2.

**2. Números e Álxebra:**
Discuta, segundo os valores de $m$, o sistema $\begin{cases} mx + (2+m^2)y = 1+m, \\ my - z = 1, \\ mx + 2y + (2m-4)z = 5. \end{cases}$

**3. Análise:**
a) Se $f(x) = a\mathrm{e}^x + b$, diga que valores deben ter $a$ e $b$ para que se cumpran $f(0) = 0$ e $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = 3$.
b) Estude se a función $f(x) = x + \sin x$ ten extremos ou puntos de inflexión no intervalo $(0,2\pi)$, diga onde están en caso de que existan e esboce a gráfica de $f$ nese intervalo.

**4. Análise:**
Calcule a área da rexión determinada polas desigualdades $x \geq 1$, $y \leq x$ e $y \geq f(x)$, con $f(x) = x \ln x$. Faga un esbozo gráfico da rexión. **Nota**: $\ln x$ é o logaritmo neperiano de $x$.

**5. Xeometría:**
a) Obteña as ecuacións paramétricas da recta $r$ que pasa polos puntos $P(2,-1,0)$ e $Q(3,0,0)$ e a ecuación implícita ou xeral do plano $\pi$ que pasa polo punto $R(0,4,-2)$ e é paralelo aos vectores $\vec{u}(1,0,-1)$ e $\vec{v}(2,1,-2)$.
b) Calcule o ángulo agudo que forma a recta $r: \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{0}$ co plano $\pi: x + z + 2 = 0$.

**6. Xeometría:**
a) Calcule o punto simétrico de $P(2,-1,0)$ con respecto ao plano $\pi: x + z + 2 = 0$.
b) Estude a posición relativa das rectas $r: \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{0}$ e $s: \frac{x-2}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z+1}{-1}$. Se se cortan, calcule o punto de corte.

**7. Estatística e Probabilidade:**
a) Calcule as catro probabilidades $P(A)$, $P(\mathrm{A} \cap \bar{B})$, $P(A|B)$ e $P(B|A)$ sabendo que $P(A \cup B) = 0.8$, $P(A \cap B) = 0.2$ e $P(A) = 2P(B)$. **Nota**: $\bar{B}$ é o suceso contrario ou complementario de $B$.
b) Nun coñecido congreso, o $60\%$ dos científicos inscritos participan *online* e o resto asisten en persoa. Ademais, o $65\%$ dos inscritos son europeos e o $80\%$ dos que asisten en persoa tamén o son. Se se elixe ao azar a un dos inscritos, calcule a probabilidade de que sexa europeo e, á vez, participe *online*; logo, a de que participe *online* se se sabe que é europeo.

**8. Estatística e Probabilidade:**
a) Nunha certa zona húmida, a probabilidade de que un cabezolo chegue a ra adulta é do $2\%$. Se se escollen ao azar 2500 deses cabezolos, cal é a probabilidade de que ao menos 55 deles cheguen a ras adultas?
b) Para conceder bolsas de estudo, un organismo valora os méritos presentados e asigna a cada candidato unha puntuación que indica máis méritos canto maior é o seu valor. Este ano, a puntuación segue unha distribución normal de media 100 e desviación típica 20, e se toma a decisión de conceder a bolsa ao $5\%$ mellor do conxunto de solicitantes. Que puntuación é preciso alcanzar para obter a bolsa?

# MATEMÁTICAS II

El examen consta de 8 preguntas de 2 puntos, de las que puede responder un **MÁXIMO DE 5**, combinadas como quiera. Si responde más preguntas de las permitidas, **solo serán corregidas las 5 primeras respondidas.**

**1. Números y Álgebra:**
Despeje la matriz $X$ de la ecuación $XA = A + XB$, si $A$ y $B$ son matrices cuadradas tales que $A - B$ es invertible. Luego, calcule $X$ si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = (A^2 - A - I)^{-1}$, donde $I$ es la matriz identidad de orden 2.

**2. Números y Álgebra:**
Discuta, según los valores de $m$, el sistema $\begin{cases} mx + (2+m^2)y = 1+m, \\ my - z = 1, \\ mx + 2y + (2m-4)z = 5. \end{cases}$

**3. Análisis:**
a) Si $f(x) = a\mathrm{e}^x + b$, diga qué valores deben tener $a$ y $b$ para que se cumplan $f(0) = 0$ y $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = 3$.
b) Estudie si la función $f(x) = x + \sin x$ tiene extremos o puntos de inflexión en el intervalo $(0,2\pi)$, diga dónde están en caso de que existan y esboce la gráfica de $f$ en ese intervalo.

**4. Análisis:**
Calcule el área de la región determinada por las desigualdades $x \geq 1$, $y \leq x$ e $y \geq f(x)$, con $f(x) = x \ln x$. Haga un esbozo gráfico de la región. **Nota**: $\ln x$ es el logaritmo neperiano de $x$.

**5. Geometría:**
a) Obtenga las ecuaciones paramétricas de la recta $r$ que pasa por los puntos $P(2,-1,0)$ y $Q(3,0,0)$ y la ecuación implícita o general del plano $\pi$ que pasa por el punto $R(0,4,-2)$ y es paralelo a los vectores $\vec{u}(1,0,-1)$ y $\vec{v}(2,1,-2)$.
b) Calcule el ángulo agudo que forma la recta $r: \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{0}$ con el plano $\pi: x + z + 2 = 0$.

**6. Geometría:**
a) Calcule el punto simétrico de $P(2,-1,0)$ con respecto al plano $\pi: x + z + 2 = 0$.
b) Estudie la posición relativa de las rectas $r: \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{0}$ y $s: \frac{x-2}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z+1}{-1}$. Si se cortan, calcule el punto de corte.

**7. Estadística y Probabilidad:**
a) Calcule las cuatro probabilidades $P(A)$, $P(A \cap \bar{B})$, $P(A|B)$ y $P(B|A)$ sabiendo que $P(A \cup B) = 0.8$, $P(A \cap B) = 0.2$ y $P(A) = 2P(B)$. **Nota**: $\bar{B}$ es el suceso contrario o complementario de $B$.
b) En un conocido congreso, el 60% de los científicos inscritos participan *online* y el resto asisten en persona. Además, el 65% de los inscritos son europeos y el 80% de los que asisten en persona también lo son. Si se elige al azar a uno de los inscritos, calcule la probabilidad de que sea europeo y, a la vez, participe *online*; luego, la de que participe *online* si se sabe que es europeo.

**8. Estadística y Probabilidad:**
a) En un cierto humedal, la probabilidad de que un renacuajo llegue a rana adulta es del 2%. Si se escogen al azar 2500 de esos renacuajos, ¿cuál es la probabilidad de que al menos 55 de ellos lleguen a ranas adultas?
b) Para conceder becas de estudio, un organismo valora los méritos presentados y asigna a cada candidato una puntuación que indica más méritos cuanto mayor es su valor. Este año, la puntuación sigue una distribución normal de media 100 y desviación típica 20, y se toma la decisión de conceder la beca al 5% mejor del conjunto de solicitantes. ¿Qué puntuación es preciso alcanzar para obtener la beca?

# MATEMÁTICAS II

**1.**

Primeira parte:

$$XA = A + XB \Leftrightarrow XA - XB = A \Leftrightarrow X(A-B) = A \Leftrightarrow \boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})^{-\mathbf{1}}.$$

Segunda parte:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = A,$$

$$B = (A^2 - A - I)^{-1} = (-I)^{-1} = -I,$$

$$A - B = A + I = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Como $\det(A-B) = 2$,

$$(A-B)^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}^T = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Finalmente,

$$\boldsymbol{X} = A(A-B)^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1/2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$

# MATEMÁTICAS II

**2.**

$$\left(\begin{array}{ccc|c} m & 2+m^2 & 0 & 1+m \\ 0 & m & -1 & 1 \\ m & 2 & 2m-4 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3-F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} m & 2+m^2 & 0 & 1+m \\ 0 & m & -1 & 1 \\ 0 & -m^2 & 2m-4 & 4-m \end{array}\right) \xrightarrow{F_3+mF_2} \left(\begin{array}{ccc|c} m & 2+m^2 & 0 & 1+m \\ 0 & m & -1 & 1 \\ 0 & 0 & m-4 & 4 \end{array}\right).$$

Sistema triangular equivalente:

$$\begin{cases} mx + (2+m^2)y = 1+m, \\ my - z = 1, \\ (m-4)z = 4. \end{cases}$$

Discusión:

- **Se $m \in \mathbb{R} \setminus \{0,4\}$, entón o sistema é compatible determinado**, xa que a súa única solución é
$$z = \frac{4}{m-4}, \quad y = \frac{1+z}{m}, \quad x = \frac{1+m-(2+m^2)y}{m}.$$
- **Se $m = 0$**, temos
$$\begin{cases} 2y = 1, \\ -z = 1, \\ -4z = 4, \end{cases}$$
e, polo tanto, **o sistema é compatible indeterminado**, xa que ten as seguintes infinitas solucións:
$$\left[x = \lambda, \quad y = \frac{1}{2}, \quad z = -1\right], \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$
- **Se $m = 4$, o sistema é incompatible**, porque a terceira ecuación queda $0 = 4$.

# MATEMÁTICAS II

**SOLUCIÓN ALTERNATIVA:**

$$A=\begin{pmatrix} m & 2+m^2 & 0 \\ 0 & m & -1 \\ m & 2 & 2m-4 \end{pmatrix},\qquad A^*=\left(\begin{array}{ccc|c} m & 2+m^2 & 0 & 1+m \\ 0 & m & -1 & 1 \\ m & 2 & 2m-4 & 5 \end{array}\right),$$

$$\operatorname{rank} A \le \operatorname{rank} A^* \le 3 \ \ \forall m \in \mathbb{R}.$$

Como $\begin{vmatrix} 2+m^2 & 0 \\ m & -1 \end{vmatrix} = -(2+m^2) \neq 0$, é seguro que $\operatorname{rank} A \ge 2 \ \ \forall m \in \mathbb{R}$ e que $[\operatorname{rank} A = 2 \Leftrightarrow \det A = 0]$.

$$\det A = \begin{vmatrix} m & 2+m^2 & 0 \\ 0 & m & -1 \\ m & 2 & 2m-4 \end{vmatrix} = m^2(2m-4) - m(2+m^2) + 2m$$
$$= m\{m(2m-4) - (2+m^2) + 2\} = m\{2m^2 - 4m - 2 - m^2 + 2\} = m(m^2-4m)$$
$$= m^2(m-4) = 0 \Leftrightarrow m \in \{0,4\}.$$

Discusión:

- **Caso $\boldsymbol{m} \in \mathbb{R} \setminus \{\mathbf{0},\mathbf{4}\}$**: $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} A^* = 3 =$ n.º de incógnitas, polo que **o sistema é compatible determinado**.
- **Caso $\boldsymbol{m} = \mathbf{0}$**: $\operatorname{rank} A = 2$ e $A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -4 & 5 \end{array}\right)$. Ao ser $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & -4 & 5 \end{vmatrix} = -10 + 2 + 8 = 0$, tense que $\operatorname{rank} A^* = 2 = \operatorname{rank} A < 3 =$ n.º de incógnitas, polo que **o sistema é compatible indeterminado**.
- **Caso $\boldsymbol{m} = \mathbf{4}$**: $\operatorname{rank} A = 2$ e $A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 18 & 0 & 5 \\ 0 & 4 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 4 & 5 \end{array}\right)$. Ao ser $\begin{vmatrix} 4 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 1 \\ 4 & 4 & 5 \end{vmatrix} = -20 + 20 - 16 = -16 \neq 0$, tense que $\operatorname{rank} A^* = 3 > \operatorname{rank} A$, situación na que **o sistema é incompatible**.

# MATEMÁTICAS II

**3.**

**3.a)** Se $f(x) = ae^x + b$, obteña os valores de $a$ e $b$ para que se cumpran $f(0) = 0$ e $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = 3$:

$$f(0) = 0 \Leftrightarrow a + b = 0 \Leftrightarrow b = -a.$$

$$f(x) = ae^x - a.$$

Podemos excluír do estudo o caso $a = 0$ (xa que entón $f$ é a función nula e $\lim_{x\to 0} f(x)/x = 0$).

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{ae^x - a}{x} \overset{\mathrm{L'H}}{=} \lim_{x\to 0} ae^x = a.$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = 3 \Leftrightarrow a = 3.$$

En definitiva, **os valores pedidos son $\boldsymbol{a = 3}$, $\boldsymbol{b = -3}$**.

# MATEMÁTICAS II

**3.b)** Estude se a función $f(x) = x + \sin x$ ten extremos ou puntos de inflexión no intervalo $(0,2\pi)$, diga onde están en caso de que existan e esboce a gráfica de $f$ nese intervalo:

$$f(x) = x + \sin x, \quad f'(x) = 1 + \cos x, \quad f''(x) = -\sin x, \quad f'''(x) = -\cos x\,.$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 + \cos x = 0 \Leftrightarrow \cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi.$$

$$f''(\pi) = -\sin \pi = 0, \quad f'''(\pi) = -\cos \pi = -1 \neq 0,$$

polo que **o punto de abscisa $x = \pi$ é un punto de inflexión de $f$**. Non hai outros puntos de inflexión, xa que $f''$ non se anula en ningún outro punto do intervalo $(0,2\pi)$. Non hai extremos, xa que o único punto crítico resultou ser punto de inflexión.

Para a representación gráfica, pensamos na función estendida a $[0,2\pi]$. Tense que:

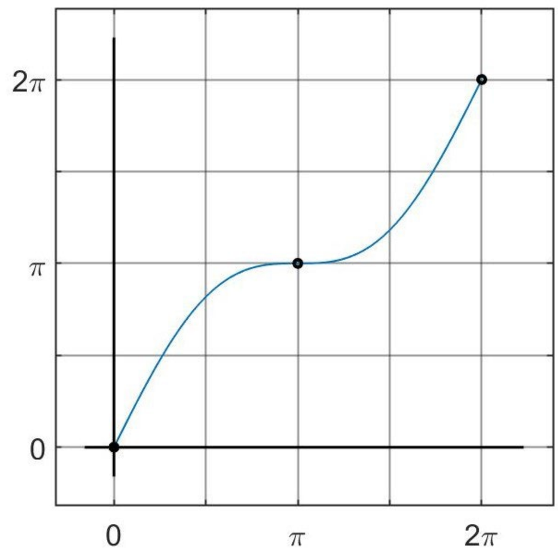
$$f(0) = 0, \qquad f(\pi) = \pi, \qquad f(2\pi) = 2\pi,$$

$$f'(x) = 1 + \cos x \geq 0 \ \ \forall x \in (0,2\pi) \ \ (f \text{ é non decrecente en } (0,2\pi).$$
$$\text{De feito, } f \text{ é crecente en } (0,2\pi), \text{xa que} f'(x) > 0 \ \ \forall x \in (0,\pi) \text{ e } f'(x) > 0 \ \ \forall x \in (\pi,2\pi)),$$

$$f''(x) = -\sin x < 0 \ \ \forall x \in (0,\pi) \quad (f \text{ é cóncava en } (0,\pi)),$$

$$f''(x) = -\sin x > 0 \ \ \forall x \in (\pi,2\pi) \quad \big(f \text{ é convexa en } (\pi,2\pi)\big).$$

Polo tanto, a gráfica de $f$ é a que se mostra na seguinte figura:

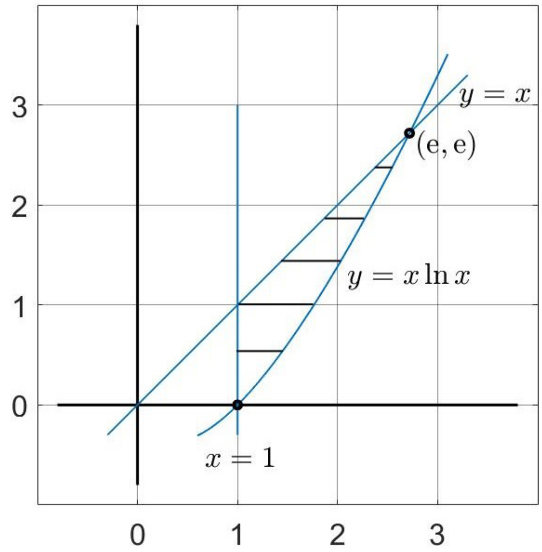


# MATEMÁTICAS II

**4.** Calcule a área da rexión determinada polas desigualdades $x \geq 1$, $y \leq x$ e $y \geq f(x)$, con $f(x) = x \ln x$. Faga un esbozo gráfico da rexión.

$$f(x) = x \ln x, \quad f'(x) = \ln x + x\frac{1}{x} = 1 + \ln x, \quad f''(x) = \frac{1}{x}.$$

Na zona de interese ($x \geq 1$), $f$ é crecente e convexa, porque tanto $f'$ como $f''$ son positivas. Como $f(1) = 0$ e $f(\mathrm{e}) = \mathrm{e}$, a situación é a do debuxo seguinte, no que se raia a rexión cuxa área hai que calcular:




O valor do límite superior ($x = \mathrm{e}$) tamén pode obterse do xeito seguinte:

$$x = x \ln x \Leftrightarrow \ln x = 1 \Leftrightarrow x = \mathrm{e}.$$

A área pedida é

$$A = \int_1^{\mathrm{e}} (x - x \ln x)\, \mathrm{d}x = \int_1^{\mathrm{e}} x(1 - \ln x)\, \mathrm{d}x.$$

Facendo partes coas eleccións

$$u = 1 - \ln x \qquad \mathrm{d}u = -\frac{1}{x}\, \mathrm{d}x$$

$$\mathrm{d}v = x\, \mathrm{d}x \qquad v = \frac{1}{2}x^2$$

tense

$$\int x(1 - \ln x)\, \mathrm{d}x = \frac{1}{2}x^2 (1 - \ln x) + \frac{1}{2}\int x\, \mathrm{d}x = \frac{1}{2}x^2(1 - \ln x) + \frac{1}{4}x^2 + C,$$

co cal

$$\boldsymbol{A} = \int_1^{\mathrm{e}} x(1 - \ln x)\, \mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}x^2(1 - \ln x) + \frac{1}{4}x^2\right]_{x=1}^{x=\mathrm{e}} = \frac{1}{4}\mathrm{e}^2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}\mathrm{e}^2 - \frac{3}{4} = \boldsymbol{\frac{e^2 - 3}{4}}$$

$$\approx \mathbf{1.0973\ u^2},$$

onde u indica unidade de lonxitude.

# MATEMÁTICAS II

**5.**

**5.a)** Ecuacións paramétricas da recta $r$ que pasa polos puntos $P(2,-1,0)$ e $Q(3,0,0)$ e a ecuación implícita ou xeral do plano $\pi$ que pasa polo punto $R(0,4,-2)$ e é paralelo aos vectores $\vec{u}(1,0,-1)$ e $\vec{v}(2,1,-2)$:

$$\vec{d}_r = \overrightarrow{PQ}(1,1,0) \Rightarrow \boldsymbol{r}\colon \begin{cases} \boldsymbol{x = 3 + \lambda}, \\ \boldsymbol{y = \lambda}, \\ \boldsymbol{z = 0}, \end{cases} \qquad \boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}.$$

$$\pi\colon \begin{vmatrix} x & y-4 & z+2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0.$$

Como

$$\begin{vmatrix} x & y-4 & z+2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -2(y-4) + z + 2 + 2(y-4) + x = x + z + 2,$$

a ecuación do plano é

$$\boldsymbol{\pi\colon x + z + 2 = 0}.$$

**5.b)** Ángulo agudo que forma a recta $r\colon \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{0}$ co plano $\pi\colon x + z + 2 = 0$.

$$\vec{d}_r(1,1,0), \quad \vec{n}_\pi(1,0,1).$$

Se $\alpha$ é o ángulo pedido,

$$\sin\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{|\vec{d}_r \cdot \vec{n}_\pi|}{\|\vec{d}_r\| \, \|\vec{n}_\pi\|} = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \boldsymbol{\alpha = \frac{\pi}{6}} \ \textbf{ou, equivalentemente, } \boldsymbol{30°}.$$

**Nota:** $|\ \ |$ *indica valor absoluto e* $\|\ \ \|$ *indica norma euclidiana en* $\mathbb{R}^3$. *Ás veces, emprégase a mesma notación para os dous conceptos, posto que* $|\ \ |$ *tamén é a norma euclidiana en* $\mathbb{R}$.

**SOLUCIÓN ALTERNATIVA:**

$$\vec{d}_r \times \vec{n}_\pi = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \vec{\imath} - \vec{\jmath} - \vec{k} = (1,-1,-1).$$

$$\cos\alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{\|\vec{d}_r \times \vec{n}_\pi\|}{\|\vec{d}_r\| \, \|\vec{n}_\pi\|} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \boldsymbol{\alpha = \frac{\pi}{6}} \ \textbf{ou, equivalentemente, } \boldsymbol{30°}.$$

# MATEMÁTICAS II

**6.**

**6.a)** Punto simétrico de $P(2,-1,0)$ con respecto ao plano $\pi: x+z+2=0$.

- Ecuacións paramétricas da recta $r$ que pasa por $P(2,-1,0)$ e é perpendicular a $\pi$:

  $\vec{d}_r = \vec{n}_\pi(1,0,1)$, co cal $r: \begin{cases} x = 2+\lambda, \\ y = -1, \\ z = \lambda, \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$

- Corte de $r$ con $\pi$:

  $$(2+\lambda)+\lambda+2 = 2\lambda+4 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -2.$$

  Logo o punto de corte é $Q(0,-1,-2)$.

- Punto simétrico pedido: se chamamos $P'(x',y',z')$ ao punto,

  $$\frac{2+x'}{2} = 0 \Leftrightarrow x' = -2,$$
  $$\frac{-1+y'}{2} = -1 \Leftrightarrow -1+y' = -2 \Leftrightarrow y' = -1,$$
  $$\frac{z'}{2} = -2 \Leftrightarrow z' = -4.$$

  Tense logo $\boldsymbol{P'(-2,-1,-4)}$.

**6.b)** Posición relativa das rectas $r: \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{0}$ e $s: \frac{x-2}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z+1}{-1}$. Se se cortan, calcule o punto de corte.

- Como $\vec{d}_r(1,1,0)$ e $\vec{d}_s(2,1,-1)$ non son proporcionais $(\frac{1}{2} \neq \frac{1}{1})$, non son nin paralelas nin coincidentes, polo que ou ben se cortan, ou ben se cruzan.

- $[P(2,-1,0) \in r,\ Q(2,-2,-1) \in s] \Rightarrow \overrightarrow{PQ}(0,-1,-1)$.

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -1+2-1 = 0 \Rightarrow \overrightarrow{PQ}, \vec{d}_r \text{ e } \vec{d}_s \text{ son coplanarios} \Rightarrow \boldsymbol{r \text{ e } s \text{ córtanse}}.$$

- Punto de corte:

  $$r: \begin{cases} x = 2+\lambda, \\ y = -1+\lambda, \\ z = 0, \end{cases} \lambda \in \mathbb{R}; \qquad s: \begin{cases} x = 2+2\mu, \\ y = -2+\mu, \\ z = -1-\mu, \end{cases} \mu \in \mathbb{R}.$$
  $$-1-\mu = 0 \Leftrightarrow \mu = -1.$$

  Logo o punto de corte é $R(2-2,-2-1,-1+1) = \boldsymbol{R(0,-3,0)}$.

# MATEMÁTICAS II

**7.**

**7.a)** Calcular as catro probabilidades $P(A)$, $P(\mathrm{A} \cap \bar{B})$, $P(A|B)$ e $P(B|A)$ sabendo que $P(A \cup B) = 0.8$, $P(A \cap B) = 0.2$ e $P(A) = 2P(B)$.

- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow 0.8 = P(A) + \frac{1}{2}P(A) - 0.2 \Rightarrow \frac{3}{2}P(A) = 1 \Rightarrow$ $\boldsymbol{P(A)} = \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}$.
- $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B}) \Rightarrow \frac{2}{3} = 0.2 + P(A \cap \bar{B}) \Rightarrow \boldsymbol{P(A \cap \bar{B})} = \frac{2}{3} - \frac{2}{10} = \frac{20-6}{30} = \frac{14}{30} = \frac{\mathbf{7}}{\mathbf{15}} = \mathbf{0.4\overline{6}}$.
- $\boldsymbol{P(A|B)} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.2}{\frac{1}{2}P(A)} = \frac{2}{10} : \frac{1}{3} = \frac{6}{10} = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{5}} = \mathbf{0.6}$.
- $\boldsymbol{P(B|A)} = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{2}{10} : \frac{2}{3} = \frac{6}{20} = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{10}} = \mathbf{0.3}$.

**7.b)** $O$ = "participar *online*", $E$ = "ser europeo". Sábese que $P(O) = 0.6$, $P(E) = 0.65$ e $P(E|\bar{O}) = 0.8$.

| | $E$ | $\bar{E}$ | |
|---|---|---|---|
| $O$ | 33 | 27 | **60** |
| $\bar{O}$ | $40 \times \mathbf{0.8} = 32$ | 8 | 40 |
| | **65** | 35 | 100 |

Segundo a táboa de continxencia,

$$\boldsymbol{P(E \cap O)} = \frac{33}{100} = \mathbf{0.33}$$

e

$$\boldsymbol{P(O|E)} = \frac{33}{65} \approx \mathbf{0.5077}.$$

**ALTERNATIVA para 7.b)**:

- $0.8 = P(E|\bar{O}) = \frac{P(E \cap \bar{O})}{P(\bar{O})} = \frac{P(E \cap \bar{O})}{0.4} \Rightarrow P(E \cap \bar{O}) = 0.32 \Rightarrow \boldsymbol{P(E \cap O)} = P(E) - P(E \cap \bar{O}) = 0.65 - 0.32 = \mathbf{0.33}$.

- $\boldsymbol{P(O|E)} = \frac{P(O \cap E)}{P(E)} = \frac{0.33}{0.65} \approx \mathbf{0.5077}$.

# MATEMÁTICAS II

**8.**

**8.a)** Nunha certa zona húmida, a probabilidade de que un cabezolo chegue a ra adulta é do 2%. Se se escollen ao azar 2500 deses cabezolos, cal é a probabilidade de que ao menos 55 deles cheguen a ras adultas?

$X =$ "n.º de cabezolos que chegan a ras adultas, de entre os 2500".

$X \to B(n,p)$, con $n = 2500$ e $p = 0.02$. Tense logo $q = 1 - p = 0.98$. Pídese $P(X \geq 55)$.

$np = 50$, $nq = 2450$, $npq = 49$, $\sqrt{npq} = 7$. Como $np > 5$ e $nq > 5$, $X$ pode aproximarse por $\tilde{X} \to N(50,7)$.

$$Z = \frac{\tilde{X} - 50}{7} \to N(0,1).$$

Aplicando a corrección de Yates ou de medio punto,

$$\boldsymbol{P(X \geq 55)} \approx P(\tilde{X} \geq 54.5) = P\left(Z \geq \frac{54.5 - 50}{7}\right) \approx P(Z \geq 0.64) = 1 - P(Z < 0.64) \approx 1 - 0.7389 = \mathbf{0.2611}.$$

**8.b)**

$X =$ "puntuación" $\to N(100,20)$, conque $Z = \frac{X-100}{20} \to N(0,1)$. Pídese $x$ tal que $P(X \geq x) = 0.05$.

$$P(X \geq x) = 0.05 \Leftrightarrow P\left(Z \geq \frac{x - 100}{20}\right) = 0.05 \Leftrightarrow P\left(Z < \frac{x - 100}{20}\right) = 0.95,$$

de onde

$$\frac{x - 100}{20} \approx 1.645 \Rightarrow x - 100 \approx 32.9 \Rightarrow \boldsymbol{x} \approx \mathbf{132.9}.$$

# MATEMÁTICAS II

O exame consta de 8 preguntas de 2 puntos, das que pode responder un **MÁXIMO DE 5**, combinadas como queira. Se responde máis preguntas das permitidas, **só serán corrixidas as 5 primeiras respondidas**.

**1. Números e Álxebra:**

a) Calcule $A$ se $(AB)^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

b) Se $A = \begin{pmatrix} 3 & x \\ y & z \end{pmatrix}$ é invertible, obteña os valores de $x$, $y$ e $z$ sabendo que $\det(A - 3I) = 0$, que $y \neq 0$ e que $(3z)A^{-1} + I = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$. Enténdase que $I$ é a matriz identidade.

**2. Números e Álxebra:**

Discuta, segundo os valores do parámetro $m$, o sistema $\begin{cases} (m+1)x & & & + & z & = & 1, \\ (m+1)x & + & y & + & z & = & m+1, \\ (m+1)x & + & my & + & (m-1)z & = & m. \end{cases}$

**3. Análise:**

a) Enuncie os teoremas de Rolle e do valor medio do cálculo diferencial.

b) Explique se $f: [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$, está ou non nas hipóteses do teorema do valor medio do cálculo diferencial. En caso de que o estea, calcule un valor $c$ para o cal se cumpra a tese dese teorema.

**4. Análise:**

a) Calcule mediante cambio de variable as integrais $\int (\sin x)^5 \cos x \, dx$ e $\int (\ln x)/x \, dx$.

b) Calcule $\int (\ln x)/x \, dx$ empregando o método de integración por partes. Logo, obteña algún valor de $B$ tal que $\int_{\mathrm{e}}^{B} (\ln x)/x \, dx = 3/2$.

**5. Xeometría:**

a) Considérense o plano $\pi: ax + y + z = 1$, onde $a$ é un parámetro real, e a recta $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{3}$. Estude a posición relativa de $\pi$ e $r$ en función de $a$ e obteña o valor de $a$ que fai que $\pi$ e $r$ sexan perpendiculares. Por último, razoe se $r$ pode estar contida en $\pi$ ou non.

b) Se $\pi: -3x + y + z = 1$, diga que valor ten que tomar $b$ para que $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y-b}{3} = \frac{z+1}{3}$ estea contida en $\pi$.

**6. Xeometría:**

Considérese o plano $\pi: 2x - y + z = 1$. Pídese:

a) Calcular a distancia de $\pi$ ao punto de corte das rectas $r_1: \begin{cases} x = 2 + \lambda, \\ y = 0, \\ z = -1 - \lambda \end{cases}$ e $r_2: \begin{cases} x = \mu, \\ y = -1 + \mu, \\ z = 0, \end{cases}$ $(\lambda, \mu \in \mathbb{R})$.

b) Obter o punto simétrico de $P(1,0,0)$ con respecto a $\pi$.

**7. Estatística e Probabilidade:**

a) Calcule $P(A|B)$ se $B \subset A$. Logo, se $P(C) = 0.5$ e $P(D) = 0.6$, explique se $C$ e $D$ poden ser incompatibles. Por último, obteña $P(E \cup F)$ e $P(E \cap \bar{F})$ se $E$ e $F$ son independentes, $P(E) = 0.3$ e $P(F) = 0.2$.

b) Tírase un dado sete veces. Calcule a probabilidade de que saian exactamente dous seises.

**8. Estatística e Probabilidade:**

Para un determinado grupo de pacientes, a tensión arterial sistólica (medida en mmHg) segue unha distribución normal de media 123.6 e desviación típica 17.8. Calcule a probabilidade de que un paciente elixido ao azar teña unha tensión comprendida entre 100 e 120 mmHg. Logo, obteña o valor da tensión que é superado polo 67% dos pacientes.

# MATEMÁTICAS II

El examen consta de 8 preguntas de 2 puntos, de las que puede responder un **MÁXIMO DE 5**, combinadas como quiera. Si responde más preguntas de las permitidas, **solo serán corregidas las 5 primeras respondidas.**

**1. Números y Álgebra:**

a) Calcule $A$ si $(AB)^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

b) Si $A = \begin{pmatrix} 3 & x \\ y & z \end{pmatrix}$ es invertible, obtenga los valores de $x$, $y$ y $z$ sabiendo que $\det(A-3I)=0$, que $y \neq 0$ y que $(3z)A^{-1} + I = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$. Entiéndase que $I$ es la matriz identidad.

**2. Números y Álgebra:**

Discuta, según los valores del parámetro $m$, el sistema $\begin{cases} (m+1)x + z = 1, \\ (m+1)x + y + z = m+1, \\ (m+1)x + my + (m-1)z = m. \end{cases}$

**3. Análisis:**

a) Enuncie los teoremas de Rolle y del valor medio del cálculo diferencial.

b) Explique si $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, está o no en las hipótesis del teorema del valor medio del cálculo diferencial. En caso de que lo esté, calcule un valor $c$ para el cual se cumpla la tesis de ese teorema.

**4. Análisis:**

a) Calcule mediante cambio de variable las integrales $\int (\sin x)^5 \cos x \, dx$ y $\int (\ln x)/x \, dx$.

b) Calcule $\int (\ln x)/x \, dx$ empleando el método de integración por partes. Luego, obtenga algún valor de $B$ tal que $\int_{\mathrm{e}}^{B} (\ln x)/x \, dx = 3/2$.

**5. Geometría:**

a) Considérense el plano $\pi\colon ax + y + z = 1$, donde $a$ es un parámetro real, y la recta $r\colon \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{3}$. Estudie la posición relativa de $\pi$ y $r$ en función de $a$ y obtenga el valor de $a$ que hace que $\pi$ y $r$ sean perpendiculares. Por último, razone si $r$ puede estar contenida en $\pi$ o no.

b) Si $\pi\colon -3x + y + z = 1$, diga qué valor tiene que tomar $b$ para que $r\colon \frac{x-1}{2} = \frac{y-b}{3} = \frac{z+1}{3}$ esté contenida en $\pi$.

**6. Geometría:**

Considérese el plano $\pi\colon 2x - y + z = 1$. Se pide:

a) Calcular la distancia de $\pi$ al punto de corte de las rectas $r_1\colon \begin{cases} x = 2+\lambda, \\ y = 0, \\ z = -1-\lambda \end{cases}$ y $r_2\colon \begin{cases} x = \mu, \\ y = -1+\mu, \\ z = 0, \end{cases}$ $(\lambda, \mu \in \mathbb{R})$.

b) Obtener el punto simétrico de $P(1,0,0)$ con respecto a $\pi$.

**7. Estadística y Probabilidad:**

a) Calcule $P(A|B)$ si $B \subset A$. Luego, si $P(C) = 0.5$ y $P(D) = 0.6$, explique si $C$ y $D$ pueden ser incompatibles. Por último, obtenga $P(E \cup F)$ y $P(E \cap \bar{F})$ si $E$ y $F$ son independientes, $P(E) = 0.3$ y $P(F) = 0.2$.

b) Se tira un dado siete veces. Calcule la probabilidad de que salgan exactamente dos seises.

**8. Estadística y Probabilidad:**

Para un determinado grupo de pacientes, la tensión arterial sistólica (medida en mmHg) sigue una distribución normal de media 123.6 y desviación típica 17.8. Calcule la probabilidad de que un paciente elegido al azar tenga una tensión comprendida entre 100 y 120 mmHg. Luego, obtenga el valor de la tensión que es superado por el 67% de los pacientes.

# MATEMÁTICAS II

**1.**

**1.a)** $AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, de onde $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} B^{-1}$.

Como $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, temos que $\det B = 1 + 1 = 2$ e, polo tanto,

$$B^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^T = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Finalmente,

$$\boldsymbol{A} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}.$$

**<u>SOLUCIÓN ALTERNATIVA</u>:**

Se $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$,

$$AB = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-b & a+b \\ c-d & c+d \end{pmatrix},$$

$$(AB)^T = \begin{pmatrix} a-b & c-d \\ a+b & c+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left[\begin{Bmatrix} a-b=1 \\ a+b=2 \end{Bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{Bmatrix} c-d=0 \\ c+d=1 \end{Bmatrix}\right]$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{Bmatrix} 2a=3 \\ b=2-a \end{Bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{Bmatrix} 2c=1 \\ c=d \end{Bmatrix}\right]$$

$$\Leftrightarrow [a = 3/2, \quad b = 1/2, \quad c = 1/2 \quad \text{e} \quad d = 1/2].$$

Logo

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}.$$

# MATEMÁTICAS II

**1.b)** Como $A = \begin{pmatrix} 3 & x \\ y & z \end{pmatrix}$ é invertible, sabemos que $\det A = 3z - xy \neq 0$.

$$A - 3I = \begin{pmatrix} 0 & x \\ y & z-3 \end{pmatrix}.$$

Ao ser $\det(A - 3I) = -xy = 0$ e $y \neq 0$, necesariamente ten que ser $x = 0$. En consecuencia, tamén teremos $z \neq 0$, porque $\det A = 3z - xy = 3z \neq 0$. Neste punto, sábese que

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ y & z \end{pmatrix}$$

con $y$ e $z$ non nulos. Obteremos os valores de $y$ e $z$ da igualdade

$$(3z)A^{-1} + I = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Posto que $\det A = 3z$,

$$A^{-1} = \frac{1}{3z}\begin{pmatrix} z & -y \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^T = \frac{1}{3z}\begin{pmatrix} z & 0 \\ -y & 3 \end{pmatrix},$$

conque

$$(3z)A^{-1} + I = \begin{pmatrix} z+1 & 0 \\ -y & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix},$$

de onde se deduce que $y = 1$ e $z = 1$.

En resumo, **os valores pedidos son $\boldsymbol{x = 0}$, $\boldsymbol{y = 1}$ e $\boldsymbol{z = 1}$**. Equivalentemente,

$$\boldsymbol{A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}.$$

**<u>SOLUCIÓN ALTERNATIVA</u>** <u>(que evita o cálculo da inversa)</u>**:**

Procédase como na resolución anterior ata chegar a que $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ y & z \end{pmatrix}$ con $y$ e $z$ non nulos. Agora nótese que a igualdade $(3z)A^{-1} + I = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ implica que $(3z)A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$. Polo tanto,

$$\begin{pmatrix} 3z & 0 \\ 0 & 3z \end{pmatrix} = (3z)I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ y & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -3+3y & 3z \end{pmatrix},$$

de onde $y = 1$ e $z = 1$.

# MATEMÁTICAS II

**2.**

$$\left(\begin{array}{ccc|c} m+1 & 0 & 1 & 1 \\ m+1 & 1 & 1 & m+1 \\ m+1 & m & m-1 & m \end{array}\right) \underset{F_3-F_1}{\overset{F_2-F_1}{\longrightarrow}} \left(\begin{array}{ccc|c} m+1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & m \\ 0 & m & m-2 & m-1 \end{array}\right)$$

$$\overset{F_3-mF_2}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} m+1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & m \\ 0 & 0 & m-2 & -m^2+m-1 \end{array}\right).$$

Sistema triangular equivalente:

$$\begin{cases} (m+1)x & & + & z & = & 1, \\ & y & & & = & m, \\ & & & (m-2)z & = & -m^2+m-1. \end{cases}$$

Discusión:

- **Se $m \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}$,** entón **o sistema é compatible determinado**, xa que a súa única solución é

$$z = \frac{-m^2+m-1}{m-2}, \quad y = m, \quad x = \frac{1-z}{m+1}.$$

- **Se $m = -1$, o sistema** queda

$$\begin{cases} & z & = & 1, \\ y & & = & -1, \\ & -3z & = & -3, \end{cases}$$

que **é compatible indeterminado**, porque ten as seguintes infinitas solucións:

$$x \in \mathbb{R}, \quad y = -1, \quad z = 1.$$

- **Se $m = 2$, o sistema é incompatible**, xa que a terceira ecuación queda $0 = -3$.

**<u>SOLUCIÓN ALTERNATIVA</u>:**

$A = \begin{pmatrix} m+1 & 0 & 1 \\ m+1 & 1 & 1 \\ m+1 & m & m-1 \end{pmatrix}$, $A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} m+1 & 0 & 1 & 1 \\ m+1 & 1 & 1 & m+1 \\ m+1 & m & m-1 & m \end{array}\right)$. Sabemos que $\operatorname{rank} A \leq \operatorname{rank} A^* \leq 3 \ \forall m \in \mathbb{R}$.

Como $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, é seguro que $\operatorname{rank} A \geq 2 \ \forall m \in \mathbb{R}$ e que $[\operatorname{rank} A = 2 \Leftrightarrow \det A = 0]$.

# MATEMÁTICAS II

$$\det A = \begin{vmatrix} m+1 & 0 & 1 \\ m+1 & 1 & 1 \\ m+1 & m & m-1 \end{vmatrix} = (m+1)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & m-1 \end{vmatrix}$$

$$= (m+1)(m-1+m-1-m) = (m+1)(m-2) = 0 \Leftrightarrow m \in \{-1,2\}.$$

Discusión:

- **Caso $\boldsymbol{m} \in \mathbb{R} \setminus \{\mathbf{-1}, \mathbf{2}\}$**: $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} A^* = 3 =$ n.º de incógnitas, polo que **o sistema é compatible determinado**.
- **Caso $\boldsymbol{m} = \mathbf{-1}$**: $\operatorname{rank} A = 2$ e $A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \end{array}\right)$. Ao ser $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = -2+1+1 = 0$, tense que $\operatorname{rank} A^* = 2 = \operatorname{rank} A < 3 =$ n.º de incógnitas, situación na que **o sistema é compatible indeterminado**.
- **Caso $\boldsymbol{m} = \mathbf{2}$**: $\operatorname{rank} A = 2$ e $A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right)$. Ao ser $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 6+1-2-2 = 5 \neq 0$, tense que $\operatorname{rank} A^* = 3 > \operatorname{rank} A$, situación na que **o sistema é incompatible**.

# MATEMÁTICAS II

**3.**

**3.a)**

**Teorema de Rolle**: se $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ é continua en $[a,b]$, derivable en $(a,b)$, e tal que $f(a) = f(b)$, entón existe algún $c \in (a,b)$ tal que $f'(c) = 0$.

**Teorema do valor medio**: se $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ é continua en $[a,b]$ e derivable en $(a,b)$, entón existe algún $c \in (a,b)$ tal que $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$.

**3.b)** A función $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, é claramente continua en $[0,1]$. Ademais,

$$f'(x) = \frac{1}{2}(1-x^2)^{-1/2}(-2x) = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}},$$

conque $f$ é derivable en $(0,1)$.

Logo ***f* si que está nas hipóteses do teorema do valor medio**, polo que ten que existir algún $c \in (0,1)$ tal que $f(1) - f(0) = f'(c)(1-0)$.

Ao ser $f(1) = 0$ e $f(0) = 1$, estamos a dicir que $f'(c) = -1$ para algún $c \in (0,1)$. Neste caso haberá un único valor posible para $c$, o cal se pode obter do seguinte xeito:

$$f'(c) = -1 \Leftrightarrow \frac{-c}{\sqrt{1-c^2}} = -1 \Leftrightarrow c = \sqrt{1-c^2} \Leftrightarrow [c^2 = 1 - c^2 \quad \text{e} \quad c > 0]$$

$$\Leftrightarrow [2c^2 = 1 \quad \text{e} \quad c > 0] \Leftrightarrow [c^2 = 1/2 \quad \text{e} \quad c > 0] \Leftrightarrow \boldsymbol{c = \sqrt{1/2}}.$$

Obsérvese que $c \in (0,1)$.

# MATEMÁTICAS II

**4.**

**4.a)**

Facendo o cambio $u = \sin x$, $du = \cos x\, dx$, tense

$$\int (\sin x)^5 \cos x\, dx = \int u^5 du = \frac{u^6}{6} + C = \boldsymbol{\frac{(\sin x)^6}{6} + C}.$$

Facendo o cambio $u = \ln x$, $du = (1/x)\, dx$, tense

$$\int \frac{\ln x}{x} dx = \int u\, du = \frac{u^2}{2} + C = \boldsymbol{\frac{1}{2}(\ln x)^2 + C}.$$

**4.b)**

Primeira parte:

Tomando

| | |
|---|---|
| $u = \ln x$ | $du = \frac{1}{x}\, dx$ |
| $dv = \frac{1}{x}\, dx$ | $v = \ln x$ |

vese que

$$\int \frac{\ln x}{x} dx = (\ln x)^2 - \int \frac{\ln x}{x}\, dx$$

Logo $2 \int (\ln x)/x\, dx = (\ln x)^2 + K$ e, de aí,

$$\int \frac{\ln x}{x} dx = \boldsymbol{\frac{1}{2}(\ln x)^2 + C}.$$

Segunda parte:

$$\int_{\mathrm{e}}^{B} \frac{\ln x}{x} dx = \left[\frac{1}{2}(\ln x)^2\right]_{\mathrm{e}}^{B} = \frac{1}{2}(\ln B)^2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow (\ln B)^2 - 1 = 3 \Leftrightarrow (\ln B)^2 = 4.$$

Unha solución sae por tanto de

$$\ln B = 2 \Leftrightarrow \boldsymbol{B = \mathrm{e}^2}.$$

# MATEMÁTICAS II

**5.**

**5.a)** Temos $\pi: ax + y + z = 1$ e $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{3}$.

- $\vec{n}_\pi(a, 1,1)$ é normal a $\pi$ e $\vec{d}_r(2,3,3)$ ten a dirección de $r$. Como

$$\vec{n}_\pi \cdot \vec{d}_r = 2a + 6 = 0 \Leftrightarrow a = -3,$$

**a recta é paralela ao plano se $\boldsymbol{a = -3}$ e corta ao plano nun punto se $\boldsymbol{a \neq -3}$.**

- Para que $r$ e $\pi$ sexan perpendiculares, $\vec{n}_\pi(a, 1,1)$ ten que ser paralelo a $\vec{d}_r(2,3,3)$:

$$\frac{a}{2} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow 3a = 2 \Leftrightarrow \boldsymbol{a = \frac{2}{3}}.$$

- $P(1,0,-1)$ é un punto de $r$. Para que $r$ estea contida en $\pi$ ten que ser $a = -3$ e, á vez, $P \in \pi$, o que non é certo: $-3 + 0 - 1 = -4 \neq 1$. Logo **$\boldsymbol{r}$ non pode estar contida en $\boldsymbol{\pi}$**.

**5.b)** Se $\pi: -3x + y + z = 1$, pídese o valor de $b$ para que $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y-b}{3} = \frac{z+1}{3}$ estea contida en $\pi$. Xa sabemos polo apartado anterior que $\vec{n}_\pi(-3,1,1)$ e $\vec{d}_r(2,3,3)$ son perpendiculares, de xeito que $r$ estará contida en $\pi$ se, e só se, un punto calquera da recta pertence tamén ao plano $\pi$. Tomando $P(1, b, -1)$,

$$P(1, b, -1) \in \pi \Leftrightarrow -3 + b - 1 = 1 \Leftrightarrow \boldsymbol{b = 5}.$$

# MATEMÁTICAS II

**6.**

**6.a)** Pídese a distancia de $\pi: 2x - y + z = 1$ ao punto de corte das rectas $r_1: \begin{cases} x = 2 + \lambda, \\ y = 0, \\ z = -1 - \lambda \end{cases}$ e $r_2: \begin{cases} x = \mu, \\ y = -1 + \mu, \\ z = 0. \end{cases}$

Podemos dar por feito que $r_1$ e $r_2$ se cortan. De $-1 - \lambda = 0$ dedúcese que $\lambda = -1$, conque o punto de corte é $P(1,0,0)$.

A distancia de $P(1,0,0)$ a $\pi: 2x - y + z - 1 = 0$ é

$$\boldsymbol{d} = \frac{|2-1|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2}} = \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{6}}}.$$

**6.b)** Punto simétrico de $P(1,0,0)$ con respecto a $\pi: 2x - y + z = 1$:

- Ecuacións paramétricas da recta $r$ que pasa por $P(1,0,0)$ e é perpendicular a $\pi$:

$\vec{d}_r = \vec{n}_\pi(2,-1,1)$, co cal $r: \begin{cases} x = 1 + 2\lambda, \\ y = -\lambda, \\ z = \lambda, \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$

- Corte de $r$ con $\pi$:

$$2(1 + 2\lambda) + \lambda + \lambda = 6\lambda + 2 = 1 \Leftrightarrow \lambda = -\frac{1}{6}.$$

Posto que $x = 1 + 2\lambda = 1 - 1/3 = 2/3$, $y = -\lambda = 1/6$ e $z = \lambda = -1/6$, o punto de corte é

$$Q\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{6}, -\frac{1}{6}\right).$$

- Punto simétrico de $P(1,0,0)$ con respecto a $\pi: 2x - y + z = 1$: se chamamos $P'(x', y', z')$ ao punto pedido, temos

$$\frac{1 + x'}{2} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow 3x' + 3 = 4 \Leftrightarrow x' = \frac{1}{3},$$

$$\frac{y'}{2} = \frac{1}{6} \Leftrightarrow 6y' = 2 \Leftrightarrow y' = \frac{1}{3},$$

$$\frac{z'}{2} = -\frac{1}{6} \Leftrightarrow 6z' = -2 \Leftrightarrow z' = -\frac{1}{3},$$

conque

$$\boldsymbol{P'}\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}, \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}, -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\right).$$

# MATEMÁTICAS II

**7.**

**7.a)**

- Se $B \subset A$, entón $A \cap B = B$, co cal
$$\boldsymbol{P(A|B)} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = \mathbf{1}.$$
(Cando se fala de $P(A|B)$, dáse por feito que $P(B)$ non é 0.)

- Se $P(C) = 0.5$ e $P(D) = 0.6$, entón **$C$ e $D$ non poden ser incompatibles**, xa que, se o fosen, $P(C \cap D)$ sería igual a 0 e, consecuentemente,
$$P(C \cup D) = P(C) + P(D) - P(C \cap D) = P(C) + P(D) = 0.5 + 0.6 = 1.1$$
sería maior que 1, o que non é posible.

- Pídense $P(E \cup F)$ e $P(E \cap \bar{F})$ se $E$ e $F$ son independentes, $P(E) = 0.3$ e $P(F) = 0.2$.
  - $P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F) = 0.5 - P(E \cap F)$. Por ser $E$ e independentes, $P(E \cap F) = P(E)P(F) = 0.06$, co cal $\boldsymbol{P(E \cup F) = 0.44}$.
  - Da igualdade $P(E) = P(E \cap F) + P(E \cap \bar{F})$ obtense
$$\boldsymbol{P(E \cap \bar{F})} = P(E) - P(E \cap F) = 0.3 - 0.06 = \mathbf{0.24}.$$
Ou, doutro xeito, $\boldsymbol{P(E \cap \bar{F})} = P(E)P(\bar{F}) = 0.3 \cdot 0.8 = \mathbf{0.24}$, xa que $E$ e $\bar{F}$ son independentes ao selo $E$ e $F$.

**7.b)**

$X =$ "n.º de seises obtidos nas sete tiradas".

$X \to B(n, p)$, con $n = 7$ e $p = 1/6$ (logo $q = 1 - p = 5/6$).

$$P(X = 2) = \binom{7}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^5 = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5^5}{(2!) \cdot 6^7} = \frac{7 \cdot 5^5}{2 \cdot 6^6} = \frac{21875}{93312} \approx 0.2344.$$

# MATEMÁTICAS II

**8.** $X =$ "tensión arterial sistólica en mmHg".

$$X \to N(123.6{,}17.8) \Rightarrow Z = \frac{X - 123.6}{17.8} \to N(0{,}1).$$

- $\boldsymbol{P(100 \leq X \leq 120)} = P\left(\frac{100-123.6}{17.8} \leq Z \leq \frac{120-123.6}{17.8}\right) \approx P(-1.33 \leq Z \leq -0.20) = P(0.20 \leq Z \leq 1.33) = P(Z \leq 1.33) - P(Z \leq 0.20) \approx 0.9082 - 0.5793 = \mathbf{0.3289}$ é a probabilidade de que un paciente elixido ao azar teña unha tensión comprendida entre 100 e 120 mmHg.

- Pídese tamén o valor de $t$ tal que $P(X > t) = 0.67$. Ao ser $0.67$ maior que $0.5$, é claro que $t$ terá que ser menor que a media $123.6$. Entón
$$P(X > t) = P\left(Z > \frac{t - 123.6}{17.8}\right) = P\left(Z < \frac{123.6 - t}{17.8}\right) = 0.67.$$
Indo á táboa da normal vese que
$$\frac{123.6 - t}{17.8} \approx 0.44,$$
de onde
$$\boldsymbol{t} \approx 123.6 - 17.8 \cdot 0.44 = \mathbf{115.768}.$$