ÍNDICE:

CiUG COMISIÓN INTERUNIVERSITARIA DE GALICIA USC	**Proba de Avaliación do Bacharelato para o Acceso á Universidade** **CONVOCATORIA ORDINARIA 2020**	**Código: 20**

MATEMÁTICAS II

O exame consta de 8 preguntas de 2 puntos, das que pode responder un **MÁXIMO DE 5**, combinadas como queira. Se responde máis preguntas das permitidas, **só se corrixirán as 5 primeiras respondidas**.

1. Números e Álxebra:

Sexan A e B as dúas matrices que cumpren $A+B=\begin{pmatrix}2 & 4\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ e $A-B=\begin{pmatrix}0 & -4\\ 4 & -2\end{pmatrix}$. Pídese:

a) Calcular A^2-B^2. (Advertencia: neste caso, $A^2-B^2 \neq (A+B)(A-B)$.)

b) Calcular a matriz X que cumpre a igualdade $XA+(A+B)^T=2I+XB$, sendo I a matriz identidade de orde 2 e $(A+B)^T$ a trasposta de $A+B$.

2. Números e Álxebra:

Discuta, segundo os valores do parámetro m, o seguinte sistema: $\begin{cases} mx + y = 2m, \\ x + z = 0, \\ x + my = 0. \end{cases}$

3. Análise:

a) Calcule $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos^2 x - 1}{1+2x-\mathrm{e}^{2x}}$.

b) Determine os intervalos de crecemento e de decrecemento de $f(x)=x(\ln x-1)$. Calcule, se existen, os máximos e mínimos relativos da función f.

4. Análise:

a) Calcule os valores de b e c para que a función $f(x)=\begin{cases} \mathrm{e}^{2x} & \text{se} \quad x\le 0, \\ x^2+bx+c & \text{se} \quad x>0 \end{cases}$ sexa, primeiro continua, e logo derivable en $x=0$.

b) Calcule $\int_1^2 x(\ln x-1)dx$.

5. Xeometría:

a) Obteña a ecuación implícita ou xeral do plano que pasa polos puntos $A(3,0,-1)$, $B(4,1,1)$ e $C(7,1,5)$.

b) Obteña as ecuacións paramétricas da recta r que é perpendicular ao plano $\pi: 4x+2y-3z-15=0$ e que pasa polo punto $P(-1,-2,2)$.

6. Xeometría:

Estude a posición relativa das rectas r e s definidas polas ecuacións $r: \frac{x-3}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z+1}{-2}$ e $s: \frac{x}{1}=\frac{y+3}{4}=\frac{z+2}{3}$. Se se cortan, calcule o punto de corte.

7. Estatística e Probabilidade:

Selecciónanse 250 pacientes para estudar a eficacia dun novo medicamento. A 150 deles adminístraselles o medicamento, mentres que o resto son tratados cun placebo. Sabendo que se curaron o 80% dos que tomaron o medicamento, cal é a probabilidade de que, seleccionado un paciente ao azar, tomase o placebo ou non curase?

8. Estatística e Probabilidade:

Nunha cadea de montaxe, o tempo empregado para realizar un determinado traballo segue unha distribución normal de media 20 minutos e desviación típica 4 minutos. Calcule a probabilidade de que se faga ese traballo nun tempo comprendido entre 16 e 26 minutos.

MATEMÁTICAS II

El examen consta de 8 preguntas de 2 puntos, de las que puede responder un **MÁXIMO DE 5**, combinadas como quiera. Si responde a más preguntas de las permitidas, **solo se corregirán las 5 primeras respondidas**.

1. Números y Álgebra:
Sean A y B las dos matrices que cumplen $A+B=\begin{pmatrix}2 & 4\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ y $A-B=\begin{pmatrix}0 & -4\\ 4 & -2\end{pmatrix}$. Se pide:
a) Calcular A^2-B^2. (Advertencia: en este caso, $A^2-B^2 \neq (A+B)(A-B)$.)
b) Calcular la matriz X que cumple la igualdad $XA+(A+B)^T=2I+XB$, siendo I la matriz identidad de orden 2 y $(A+B)^T$ la traspuesta de $A+B$.

2. Números y Álgebra:
Discuta, según los valores del parámetro m, el siguiente sistema: $\begin{cases} mx + y = 2m, \\ x + z = 0, \\ x + my = 0. \end{cases}$

3. Análisis:
a) Calcule $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos^2 x-1}{1+2x-e^{2x}}$.
b) Determine los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de $f(x)=x(\ln x-1)$. Calcule, si existen, los máximos y mínimos relativos de la función f.

4. Análisis:
a) Calcule los valores de b y c para que la función $f(x)=\begin{cases} e^{2x} & \text{si} \quad x\leq 0, \\ x^2+bx+c & \text{si} \quad x>0 \end{cases}$ sea, primero continua, y luego derivable en $x=0$.
b) Calcule $\int_1^2 x(\ln x-1)dx$.

5. Geometría:
a) Obtenga la ecuación implícita o general del plano que pasa por los puntos $A(3,0,-1)$, $B(4,1,1)$ y $C(7,1,5)$.
b) Obtenga las ecuaciones paramétricas de la recta r que es perpendicular al plano $\pi: 4x+2y-3z-15=0$ y que pasa por el punto $P(-1,-2,2)$.

6. Geometría:
Estudie la posición relativa de las rectas r y s definidas por las ecuaciones $r: \frac{x-3}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z+1}{-2}$ y $s: \frac{x}{1}=\frac{y+3}{4}=\frac{z+2}{3}$. Si se cortan, calcule el punto de corte.

7. Estadística y Probabilidad:
Se seleccionan 250 pacientes para estudiar la eficacia de un nuevo medicamento. A 150 de ellos se les administra el medicamento, mientras que el resto son tratados con un placebo. Sabiendo que se curaron el 80% de los que tomaron el medicamento, ¿cuál es la probabilidad de que, seleccionado un paciente al azar, tomara el placebo o no se curara?

8. Estadística y Probabilidad:
En una cadena de montaje, el tiempo empleado para realizar un determinado trabajo sigue una distribución normal de media 20 minutos y desviación típica 4 minutos. Calcule la probabilidad de que se haga ese trabajo en un tiempo comprendido entre 16 y 26 minutos.

MATEMÁTICAS II

CRITERIOS DE AVALIACIÓN

Só puntúan cinco das oito preguntas.

As puntuacións parciais que seguen están ligadas a un determinado xeito de resolver os exercicios, e pode haber outras formas correctas de solucionalos.

1. **Números e Álxebra** (2 puntos)
   a) 1 punto: 0.25 puntos polo cálculo de A, 0.25 puntos polo cálculo de B e 0.5 puntos polo cálculo de $A^2 - B^2$.
   b) 1 punto: 0.5 puntos por despexar X e calcular a inversa que naturalmente xurde e 0.5 puntos polo cálculo final de X.

2. **Números e Álxebra** (2 puntos): 0.5 puntos por chegar a que os valores críticos son $m = \pm 1$ e 0.5 puntos polo estudo de cada un dos tres casos que se presentan.

3. **Análise** (2 puntos)
   a) 1 punto: 0.5 puntos por cada unha das dúas veces que se aplica a regra de L'Hôpital.
   b) 1 punto: 0.5 puntos por determinar os intervalos nos que a derivada ten signo constante e 0.5 puntos por encontrar o mínimo.

4. **Análise** (2 puntos)
   a) 1 punto: 0.5 puntos polo estudo da continuidade e 0.5 puntos polo estudo da derivabilidade.
   b) 1 punto: 0.5 puntos polo cálculo da primitiva e 0.5 puntos polo cálculo do valor da integral definida.

5. **Xeometría** (2 puntos)
   a) 1 punto: 0.5 puntos polos elementos que determinan o plano e 0.5 puntos por dar a ecuación pedida.
   b) 1 punto: 0.5 puntos polos elementos que determinan a recta e 0.5 puntos por dar as ecuacións pedidas.

6. **Xeometría** (2 puntos): 1 punto pola posición relativa e 1 punto polo punto de corte.

7. **Estatística e Probabilidade** (2 puntos): se M é "tomar o medicamento" e C é "curarse", 1 punto por chegar a $P(\overline{M \cap C})$ e 1 punto polo cálculo final.

8. **Estatística e Probabilidade** (2 puntos): 1 punto por chegar a $P(Z \leq 1.5) - P(Z \leq -1)$ e 1 punto polo resto do exercicio.

MATEMÁTICAS II
EXEMPLOS DE RESPOSTAS/SOLUCIÓNS

1. Números e Álxebra:

Sexan A e B as dúas matrices que cumpren $A+B=\begin{pmatrix}2 & 4\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ e $A-B=\begin{pmatrix}0 & -4\\ 4 & -2\end{pmatrix}$. Pídese:

a) Calcular A^2-B^2. (Advertencia: neste caso, $A^2-B^2\neq(A+B)(A-B)$.)

b) Calcular a matriz X que cumpre a igualdade $XA+(A+B)^T=2I+XB$, sendo I a matriz identidade de orde 2 e $(A+B)^T$ a trasposta de $A+B$.

Solución:

1.a) Nótese que $2A=A+B+A-B=\begin{pmatrix}2 & 4\\ 0 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & -4\\ 4 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 4 & -2\end{pmatrix}$, de onde $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & -1\end{pmatrix}$. Polo tanto, $B=A+B-A=\begin{pmatrix}2 & 4\\ 0 & 0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 4\\ -2 & 1\end{pmatrix}$.

Como $A^2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ e $B^2=\begin{pmatrix}1 & 4\\ -2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 4\\ -2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7 & 8\\ -4 & -7\end{pmatrix}$, tense finalmente que

$$A^2-B^2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-7 & 8\\ -4 & -7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8 & -8\\ 4 & 8\end{pmatrix}.$$

1.b) En primeiro lugar, imos despexar X:

$$XA+(A+B)^T=2I+XB\Leftrightarrow X(A-B)=2I-(A+B)^T\Leftrightarrow X=[2I-(A+B)^T](A-B)^{-1}.$$

Non hai ningún problema no último paso porque $A-B$ é invertible: $\det(A-B)=16\neq 0$.

- Cálculo de $2I-(A+B)^T$: como $A+B=\begin{pmatrix}2 & 4\\ 0 & 0\end{pmatrix}$,
$$2I-(A+B)^T=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2 & 0\\ 4 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ -4 & 2\end{pmatrix}.$$
- Cálculo de $(A-B)^{-1}$: ao ser $A-B=\begin{pmatrix}0 & -4\\ 4 & -2\end{pmatrix}$ e $\det(A-B)=16$,
$$(A-B)^{-1}=\frac{1}{16}\begin{pmatrix}-2 & -4\\ 4 & 0\end{pmatrix}^T=\frac{1}{16}\begin{pmatrix}-2 & 4\\ -4 & 0\end{pmatrix}=\frac{1}{8}\begin{pmatrix}-1 & 2\\ -2 & 0\end{pmatrix}.$$

Tras estes cálculos, resulta

$$X=\frac{1}{8}\begin{pmatrix}0 & 0\\ -4 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 2\\ -2 & 0\end{pmatrix}=\frac{1}{8}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & -8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}.$$

MATEMÁTICAS II
EXEMPLOS DE RESPOSTAS/SOLUCIÓNS

2. Números e Álxebra:

Discuta, segundo os valores do parámetro m, o seguinte sistema: $\begin{cases} mx + y = 2m, \\ x + z = 0, \\ x + my = 0. \end{cases}$

Solución:

A notación F_i indicará "fila i". Unha expresión do tipo $F_i + \alpha F_j$ (na que $\alpha \in \mathbb{R}$ e i é maior que j) quererá dicir que no seguinte paso vaise cambiar a fila i da matriz polo resultado da operación $F_i + \alpha F_j$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} m & 1 & 0 & 2m \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & m & 0 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ m & 1 & 0 & 2m \\ 1 & m & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{F_3 - F_1}{\overset{F_2 - mF_1}{\longrightarrow}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -m & 2m \\ 0 & m & -1 & 0 \end{array}\right) \overset{F_3 - mF_2}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -m & 2m \\ 0 & 0 & -1+m^2 & -2m^2 \end{array}\right).$$

Así pois, o sistema que temos que estudar equivale este outro:

$$\begin{cases} x + z = 0, \\ y - mz = 2m, \\ (-1+m^2)z = -2m^2, \end{cases}$$

para o que, ao ser triangular, é doado facer a discusión, que queda como segue:

- Se $m \in \mathbb{R} \setminus \{-1,1\}$, entón o sistema é compatible determinado, xa que a súa única solución é
$$z = \frac{-2m^2}{-1+m^2}, \quad y = 2m + mz, \quad x = -z.$$
- Se $m \in \{-1,1\}$ o sistema é incompatible (non ten solución), porque a terceira ecuación queda $0 = -2$.

Solución alternativa:

Sexan $A = \begin{pmatrix} m & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & m & 0 \end{pmatrix}$ e $A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} m & 1 & 0 & 2m \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & m & 0 & 0 \end{array}\right)$, respectivamente, a matriz do sistema e a matriz ampliada. Como $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, cúmprese que $2 \leq \operatorname{rank} A \leq \operatorname{rank} A^* \leq 3$ e tamén, conseguintemente, que $\operatorname{rank} A = 2$ se, e só se, $\det A = 0$. Dado que

$$\det A = \begin{vmatrix} m & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & m & 0 \end{vmatrix} = 1 - m^2 = 0 \Leftrightarrow m \in \{-1,1\},$$

a discusión do sistema queda como segue:

- Caso $m \in \mathbb{R} \setminus \{-1,1\}$: $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} A^* = 3 =$ n.º de incógnitas, polo que o sistema é compatible determinado (ten unha única solución).
- Caso $m \in \{-1,1\}$: $\operatorname{rank} A = 2$. Por outra banda, ao ser $\begin{vmatrix} m & 0 & 2m \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \pm1 & 0 & \pm2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \mp 2 \neq 0$, sábese que $\operatorname{rank} A^* = 3 > \operatorname{rank} A$, situación na que o sistema é incompatible (non ten solución).

MATEMÁTICAS II
EXEMPLOS DE RESPOSTAS/SOLUCIÓNS

3. Análise:

a) Calcule $\lim_{x\to 0} \frac{\cos^2 x - 1}{1+2x-e^{2x}}$.

b) Determine os intervalos de crecemento e de decrecemento de $f(x) = x(\ln x - 1)$. Calcule, se existen, os máximos e mínimos relativos da función f.

Solución:

3.a)

indeterminación $\frac{0}{0}$, L'Hôpital

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos^2 x - 1}{1 + 2x - e^{2x}} = \lim_{x\to 0} \frac{-2\cos x \sin x}{2 - 2e^{2x}} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x \sin x}{e^{2x} - 1} = \lim_{x\to 0} \frac{-\sin^2 x + \cos^2 x}{2e^{2x}} = \frac{1}{2}.$$

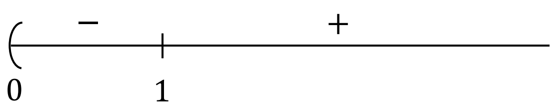
Falando con rigor, o límite $\lim_{x\to 0} \frac{-2\cos x \sin x}{2-2e^{2x}}$ existe e vale $\frac{1}{2}$ porque $\lim_{x\to 0} \frac{-\sin^2 x + \cos^2 x}{2e^{2x}}$ existe e vale $\frac{1}{2}$, e, analogamente, o límite $\lim_{x\to 0} \frac{\cos^2 x - 1}{1+2x-e^{2x}}$ existe e vale $\frac{1}{2}$ porque $\lim_{x\to 0} \frac{-2\cos x \sin x}{2-2e^{2x}}$ existe e vale $\frac{1}{2}$.

3.b)

$$f(x) = x(\ln x - 1), \mathrm{Dom}(f) = (0, \infty).$$

$$f'(x) = \ln x - 1 + x\frac{1}{x} = \ln x.$$

Vese que f' ten signo negativo en $(0,1)$ e positivo en $(1, \infty)$:



SIGNO DE f'.

Segundo esta análise, f é estritamente decrecente en $(0,1)$ e estritamente crecente en $(1, \infty)$. Dado que ademais é continua en $(0, \infty)$, conclúese que ten un mínimo absoluto (logo relativo) en $x = 1$ e que non ten outros extremos.

MATEMÁTICAS II
EXEMPLOS DE RESPOSTAS/SOLUCIÓNS

4. Análise:

a) Calcule os valores de b e c para que a función $f(x)=\begin{cases} e^{2x} & \text{se} \quad x\leq 0, \\ x^2+bx+c & \text{se} \quad x>0 \end{cases}$ sexa, primeiro continua, e logo derivable en $x=0$.

b) Calcule $\int_1^2 x(\ln x-1)dx$.

Solución:

4.a)

- Continuidade: nótese que $f(0)=1$, $\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-} e^{2x}=1$, e, para calquera valor de $b\in\mathbb{R}$, $\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+} x^2+bx+c=c$. Por conseguinte, f é continua en $x=0$ se, e soamente se, $(b,c)\in\mathbb{R}\times\{1\}$.
- Derivabilidade: posto que f ten que ser continua para poder ser derivable, é obrigado que $c=1$, e así
$$f(x)=\begin{cases} e^{2x} & \text{se} \quad x\leq 0, \\ x^2+bx+1 & \text{se} \quad x>0 \end{cases} \quad \text{e} \quad f'(x)=\begin{cases} 2e^{2x} & \text{se} \quad x< 0, \\ 2x+b & \text{se} \quad x>0. \end{cases}$$
Como f é continua, $\lim_{x\to 0^-} f'(x)=\lim_{x\to 0^-} 2e^{2x}=2$ e $\lim_{x\to 0^+} f'(x)=\lim_{x\to 0^+}(2x+b)=b$, a función f é derivable en $x=0$ se, e soamente se, $b=2$ e $c=1$.

Solución alternativa para o estudo da derivabilidade (empregando a definición de derivada):
Do mesmo xeito que na solución anterior, chégase a $f(x)=\begin{cases} e^{2x} & \text{se} \quad x\leq 0, \\ x^2+bx+1 & \text{se} \quad x>0, \end{cases}$ xa que c ten que valer 1. Agora, como $\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{e^{2x}-1}{x}\stackrel{*}{=}\lim_{x\to 0^-} 2e^{2x}=2$ (o asterisco * indica o uso da regra de L'Hôpital) e $\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2+bx+1-1}{x}=\lim_{x\to 0^+}(x+b)=b$, conclúese que a función f é derivable en $x=0$ se, e soamente se, $b=2$ e $c=1$.

4.b) Aplicando a fórmula de integración por partes con
$$u=\ln x-1, \quad du=\frac{1}{x}dx,$$
$$dv=xdx, \quad v=\frac{1}{2}x^2,$$
obtense
$$\int x(\ln x-1)dx=\frac{1}{2}x^2(\ln x-1)-\frac{1}{2}\int x\,dx=\frac{1}{2}x^2(\ln x-1)-\frac{1}{4}x^2+C=\frac{1}{2}x^2\left(\ln x-1-\frac{1}{2}\right)+C$$
$$=\frac{1}{2}x^2\left(\ln x-\frac{3}{2}\right)+C,$$
e polo tanto
$$\int_1^2 x(\ln x-1)dx=\left[\frac{1}{2}x^2\left(\ln x-\frac{3}{2}\right)\right]_1^2=2\left(\ln 2-\frac{3}{2}\right)-\frac{1}{2}\left(-\frac{3}{2}\right)=2\ln 2-3+\frac{3}{4}=\ln 4-\frac{9}{4}\approx -0.8637.$$

MATEMÁTICAS II
EXEMPLOS DE RESPOSTAS/SOLUCIÓNS

5. Xeometría:

a) Obteña a ecuación implícita ou xeral do plano que pasa polos puntos $A(3,0,-1)$, $B(4,1,1)$ e $C(7,1,5)$.

b) Obteña as ecuacións paramétricas da recta r que é perpendicular ao plano $\pi: 4x+2y-3z-15=0$ e que pasa polo punto $P(-1,-2,2)$.

Solución:

5.a) Se π é o plano pedido, π pasa por $A(3,0,-1)$ e está xerado por $\overrightarrow{AB}(1,1,2)$ e $\overrightarrow{AC}(4,1,6)$, co cal

$$\pi: \begin{vmatrix} x-3 & y & z+1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 0.$$

Posto que $\begin{vmatrix} x-3 & y & z+1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 6x-18+8y+z+1-4z-4-2x+6-6y = 4x+2y-3z-15$, a ecuación implícita do plano é $\pi: 4x+2y-3z-15=0$.

5.b) O vector normal ao plano π é un vector director de r: $\vec{d}_r = \vec{n}_\pi(4,2,-3)$. Obtéñense así as seguintes ecuacións paramétricas de r:

$$r: \begin{cases} x=-1+4\lambda, \\ y=-2+2\lambda, \\ z=\ \ 2-3\lambda, \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

MATEMÁTICAS II
EXEMPLOS DE RESPOSTAS/SOLUCIÓNS

6. Xeometría:

Estude a posición relativa das rectas r e s definidas polas ecuacións $r: \frac{x-3}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z+1}{-2}$ e $s: \frac{x}{1} = \frac{y+3}{4} = \frac{z+2}{3}$. Se se cortan, calcule o punto de corte.

Solución:

$\vec{d}_r(2,-1,-2)$ e $\vec{d}_s(1,4,3)$ son vectores directores de r e s, respectivamente. Como $\frac{2}{1} \neq \frac{-1}{4}$, r e s non son paralelas nin coincidentes. Consecuentemente, ou ben se cruzan, ou ben se cortan. Pódese discernir cal desas dúas situacións se dá a partir das ecuacións paramétricas. En efecto, ao ser

$$r: \begin{cases} x= & 3+2\lambda, \\ y= & -\lambda, \\ z= & -1-2\lambda, \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}; \qquad s: \begin{cases} x= & \mu, \\ y= & -3+4\mu, \\ z= & -2+3\mu, \end{cases} \quad \mu \in \mathbb{R},$$

as rectas r e s cortaranse se, e só se, o sistema lineal $\begin{cases} 3+2\lambda= & \mu, \\ -\lambda= & -3+4\mu, \end{cases}$ ten solución única e ademais esa solución satisfai tamén a igualdade $-1-2\lambda = -2+3\mu$.

$$\begin{Bmatrix} 3+2\lambda= & \mu \\ -\lambda= & -3+4\mu \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} 2\lambda-\mu= & -3 \\ -\lambda-4\mu= & -3 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} 2\lambda-\mu= & -3 \\ -2\lambda-8\mu= & -6 \end{Bmatrix}.$$

Sumando as dúas últimas ecuacións obtemos $-9\mu = -9$, de onde $\mu = 1$, o que implica $\lambda = 3-4\mu = -1$. Como ademais $-1-2\lambda = -2+3\mu = 1$, conclúese que r e s córtanse no punto $P(3+2\lambda, -\lambda, -1-2\lambda) = P(1,1,1)$.

Solución alternativa:

$\vec{d}_r(2,-1,-2)$ e $\vec{d}_s(1,4,3)$ son vectores directores de r e s, respectivamente. Como $\frac{2}{1} \neq \frac{-1}{4}$, r e s non son paralelas nin coincidentes. Consecuentemente, ou ben se cruzan, ou ben se cortan.

$$P(3,0,-1) \in r, \quad Q(0,-3,-2) \in s, \quad \overrightarrow{PQ}(-3,-3,-1).$$

$\begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 1 & 4 & 3 \\ -3 & -3 & -1 \end{vmatrix} = -8+9+6-24+18-1 = 0$, de xeito que $\vec{d}_r$, $\vec{d}_s$ e $\overrightarrow{PQ}$ son coplanarios e polo tanto as rectas r e s córtanse.

Para calcular o punto de corte, téñense en conta as ecuacións paramétricas

$$r: \begin{cases} x= & 3+2\lambda, \\ y= & -\lambda, \\ z= & -1-2\lambda, \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}; \qquad s: \begin{cases} x= & \mu, \\ y= & -3+4\mu, \\ z= & -2+3\mu, \end{cases} \quad \mu \in \mathbb{R},$$

e se resolve o sistema lineal $\begin{cases} 3+2\lambda= & \mu, \\ -\lambda= & -3+4\mu. \end{cases}$ Basta ver que $\mu = 1$, por exemplo como se fixo arriba (non é necesario calcular λ), de onde se infire que o punto de corte é $P(\mu, -3+4\mu, -2+3\mu) = P(1,1,1)$.

MATEMÁTICAS II
EXEMPLOS DE RESPOSTAS/SOLUCIÓNS

7. Estatística e Probabilidade:
Selecciónanse 250 pacientes para estudar a eficacia dun novo medicamento. A 150 deles adminístraselles o medicamento, mentres que o resto son tratados cun placebo. Sabendo que se curaron o 80% dos que tomaron o medicamento, cal é a probabilidade de que, seleccionado un paciente ao azar, tomase o placebo ou non curase?

Solución:

Se $M =$ "tomar o medicamento" e $C =$ "curarse", tense a seguinte táboa de continxencia:

	$\boldsymbol{M}$	$\boldsymbol{\overline{M}}$	
$\boldsymbol{C}$	$150 \times \mathbf{0.8} = 120$		
$\boldsymbol{\overline{C}}$	30		
	150	100	**250**

A probabilidade pedida é $P(\overline{M} \cup \overline{C}) = \frac{100+30}{250} = \frac{130}{250} = \frac{13}{25} = 0.52$.

Solución alternativa:

Se $M =$ "tomar o medicamento" e $C =$ "curarse", sábese que $P(M) = \frac{150}{250} = \frac{3}{5}$ e que $P(C|M) = 0.8 = \frac{4}{5}$. Sábese tamén que $P(C|M) = \frac{P(M \cap C)}{P(M)}$ e que, en virtude dunha das leis de De Morgan, $\overline{M} \cup \overline{C} = \overline{M \cap C}$. Así pois, a probabilidade pedida é

$$P(\overline{M} \cup \overline{C}) = P(\overline{M \cap C}) = 1 - P(M \cap C) = 1 - P(M)P(C|M) = 1 - \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{5} = 1 - \frac{12}{25} = \frac{13}{25} = 0.52.$$

MATEMÁTICAS II
EXEMPLOS DE RESPOSTAS/SOLUCIÓNS

8. Estatística e Probabilidade:
Nunha cadea de montaxe, o tempo empregado para realizar un determinado traballo segue unha distribución normal de media 20 minutos e desviación típica 4 minutos. Calcule a probabilidade de que se faga ese traballo nun tempo comprendido entre 16 e 26 minutos.

Solución:

Sexa $X =$ "tempo, en minutos, empregado para realizar o traballo".

$$X \longrightarrow N(20,4) \Longrightarrow Z = \frac{X-20}{4} \longrightarrow N(0,1).$$

Logo

$$P(16 \leq X \leq 26) = P\left(\frac{-4}{4} \leq Z \leq \frac{6}{4}\right) = P(-1 \leq Z \leq 1.5) = P(Z \leq 1.5) - P(Z \leq -1).$$

Como $P(Z \leq 1.5) \approx 0.9332$ e $P(Z \leq -1) = P(Z \geq 1) = 1 - P(Z \leq 1) \approx 1 - 0.8413 = 0.1587$, a probabilidade pedida é

$$P(16 \leq X \leq 26) \approx 0.9332 - 0.1587 = 0.7745.$$

MATEMÁTICAS II

O exame consta de 8 preguntas de 2 puntos, das que pode responder un **MÁXIMO DE 5**, combinadas como queira. Se responde máis preguntas das permitidas, **só se corrixirán as 5 primeiras respondidas**.

1. Números e Álxebra:
Para a ecuación matricial $A^2X + AB = B$, pídese:
a) Despexar X supoñendo que A (e por tanto A^2) é invertible, e dicir cales serían as dimensións de X e de B se A tivese dimensión 4×4 e B tivese 3 columnas.
b) Resolvela no caso en que $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

2. Números e Álxebra:
Discuta, segundo os valores do parámetro m, o seguinte sistema: $\begin{cases} (m+3)x & - & m^2y & = & 3m, \\ (m+3)x & + & my & = & 3m+6. \end{cases}$

3. Análise:
Determine os valores de a e b que fan que a función $f(x) = \begin{cases} \frac{a-\cos x}{x} & \text{se} \quad x < 0, \\ bx & \text{se} \quad x \geq 0 \end{cases}$ sexa, primeiro continua, e logo derivable.

4. Análise:
a) Calcule a área da rexión encerrada polo eixe X e a gráfica de $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}x + 1 & \text{se} \quad x < 0, \\ (x-1)^2 & \text{se} \quad x \geq 0. \end{cases}$
b) Calcule $\int x\sqrt{x^2-1}\, dx$.

5. Xeometría:
Sexan r a recta de vector director $\vec{d}_r(1,0,3)$ que pasa por $P(1,0,0)$ e $\pi: -2x + y + z = 0$. Pídese a posición relativa de r e π. En caso de que se corten, achar o punto de corte.

6. Xeometría:
a) Calcule k sabendo que os vectores $\vec{u}(2,0,0)$, $\vec{v}(0,k,1)$ e $\vec{w}(2,2,2)$ son coplanarios.
b) Obteña a ecuación implícita do plano π que pasa por $P(1,0,0)$ e contén a $r: x - 1 = \frac{y}{-4} = \frac{z+1}{3}$.

7. Estatística e Probabilidade:
O 57% dos estudantes matriculados na Universidade de Cambridge son naturais do Reino Unido e, de entre todos eses, o 83% aproban con honores. Ademais, a porcentaxe global de aprobados con honores é do 80%. Calcular a probabilidade de que un estudante elixido ao azar non nacese no Reino Unido sabendo que aprobou con honores.

8. Estatística e Probabilidade:
a) Nunha determinada poboación de árbores, o 20% teñen máis de 30 anos. Se se elixen 40 árbores ao azar, calcule a probabilidade de que soamente 4 deles teñan máis de 30 anos. O número total de árbores é tan grande que se pode asumir elección con substitución.
b) Se X segue unha distribución normal de media 15 e $P(X \leq 18) = 0.6915$, cal é a desviación típica?

MATEMÁTICAS II

El examen consta de 8 preguntas de 2 puntos, de las que puede responder un **MÁXIMO DE 5**, combinadas como quiera. Si responde a más preguntas de las permitidas, **solo se corregirán las 5 primeras respondidas**.

1. Números y Álgebra:
Para la ecuación matricial $A^2X + AB = B$, se pide:
a) Despejar X suponiendo que A (y por tanto A^2) es invertible, y decir cuáles serían las dimensiones de X y de B si A tuviera dimensión 4×4 y B tuviera 3 columnas.
b) Resolverla en el caso en que $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

2. Números y Álgebra:
Discuta, según los valores del parámetro m, el siguiente sistema: $\begin{cases} (m+3)x - m^2y = 3m, \\ (m+3)x + my = 3m+6. \end{cases}$

3. Análisis:
Determine los valores de a y b que hacen que la función $f(x) = \begin{cases} \frac{a-\cos x}{x} & \text{si} \quad x < 0, \\ bx & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$ sea, primero continua, y luego derivable.

4. Análisis:
a) Calcule el área de la región encerrada por el eje X y la gráfica de $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}x + 1 & \text{si} \quad x < 0, \\ (x-1)^2 & \text{si} \quad x \geq 0. \end{cases}$
b) Calcule $\int x\sqrt{x^2-1}\, dx$.

5. Geometría:
Sean r la recta de vector director $\vec{d}_r(1,0,3)$ que pasa por $P(1,0,0)$ y $\pi: -2x + y + z = 0$. Se pide la posición relativa de r y π. En caso de que se corten, hallar el punto de corte.

6. Geometría:
a) Calcule k sabiendo que los vectores $\vec{u}(2,0,0)$, $\vec{v}(0,k,1)$ y $\vec{w}(2,2,2)$ son coplanarios.
b) Obtenga la ecuación implícita del plano π que pasa por $P(1,0,0)$ y contiene a $r: x - 1 = \frac{y}{-4} = \frac{z+1}{3}$.

7. Estadística y Probabilidad:
El 57% de los estudiantes matriculados en la Universidad de Cambridge son naturales del Reino Unido y, de entre todos esos, el 83% aprueban con honores. Además, el porcentaje global de aprobados con honores es del 80%. Calcular la probabilidad de que un estudiante elegido al azar no haya nacido en el Reino Unido sabiendo que aprobó con honores.

8. Estadística y Probabilidad:
a) En una determinada población de árboles, el 20% tienen más de 30 años. Si se eligen 40 árboles al azar, calcule la probabilidad de que solamente 4 de ellos tengan más de 30 años. El número total de árboles es tan grande que se puede asumir elección con reemplazo.
b) Si X sigue una distribución normal de media 15 y $P(X \leq 18) = 0.6915$, ¿cuál es la desviación típica?

MATEMÁTICAS II
CRITERIOS DE AVALIACIÓN

Só puntúan cinco das oito preguntas.

As puntuacións parciais que seguen están ligadas a un determinado xeito de resolver os exercicios, e pode haber outras formas correctas de solucionalos.

1. **Números e Álxebra** (2 puntos)
   a) 1 punto: 0.5 puntos por despexar X e 0.5 puntos polas dimensións.
   b) 1 punto: 0.5 puntos por cálculos previos e 0.5 puntos pola obtención de X aplicando a fórmula obtida no apartado anterior.

2. **Números e Álxebra** (2 puntos): 0.5 puntos por cada un dos catro casos que se presentan.

3. **Análise** (2 puntos): 1 punto pola continuidade e 1 punto pola derivabilidade.

4. **Análise** (2 puntos)
   a) 1 punto: 0.5 puntos pola formulación do problema e 0.5 puntos por chegar ao resultado.
   b) 1 punto.

5. **Xeometría** (2 puntos): 1 punto pola posición relativa e 1 punto polo punto de corte.

6. **Xeometría** (2 puntos)
   a) 1 punto.
   b) 1 punto: 0.5 puntos polos elementos que determinan o plano e 0.5 puntos pola ecuación.

7. **Estatística e Probabilidade** (2 puntos): 1 punto pola táboa de continxencia e 1 punto polo cálculo da probabilidade.

8. **Estatística e Probabilidade** (2 puntos)
   a) 1 punto.
   b) 1 punto: 0.5 puntos por chegar a $P\left(Z \leq \frac{3}{\sigma}\right) = 0.6915$ e 0.5 puntos pola determinación de σ.

MATEMÁTICAS II
EXEMPLOS DE RESPOSTAS/SOLUCIÓNS

1. Números e Álxebra:

Para a ecuación matricial $A^2X + AB = B$, pídese:

a) Despexar X supoñendo que A (e por tanto A^2) é invertible, e dicir cales serían as dimensións de X e de B se A tivese dimensión 4×4 e B tivese 3 columnas.

b) Resolvela no caso en que $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

Solución:

1.a) En primeiro lugar, despéxase X:

$$A^2X + AB = B \Leftrightarrow A^2X = B - AB \Leftrightarrow X = (A^2)^{-1}(B - AB).$$

É certo tamén que $X = (A^{-1})^2(B - AB)$, xa que $(A^2)^{-1} = (A^{-1})^2$.

Analízanse agora as dimensións: do esquema

$$\underbrace{A^2}_{4\times 4}\underbrace{X}_{p\times q} + \underbrace{A}_{4\times 4}\underbrace{B}_{r\times 3} = \underbrace{B}_{r\times 3}$$

dedúcese que $p = r = 4$ e que $q = 3$, conque X e B deben ter dimensión 4×3.

1.b)

- **Cálculo de $\left(A^2\right)^{-1}$:** $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 10 \end{pmatrix}$, $\det A^2 = 10 - 9 = 1$.

  Logo $(A^2)^{-1} = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- **Cálculo de $B - AB$:** $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -10 \end{pmatrix}$, de onde

  $$B - AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

- **Cálculo de X:**

  $$X = (A^2)^{-1}(B - AB) = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

MATEMÁTICAS II

EXEMPLOS DE RESPOSTAS/SOLUCIÓNS

Solución alternativa a 1.b):

Dado que $B=-A$, tense $X=(A^2)^{-1}(B-AB)=(A^2)^{-1}(-A+A^2)=-A^{-1}+I$. Agora, como $\det A=\begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix}=-1$, a inversa de A vén dada por $A^{-1}=-\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix} -3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, e entón

$$X=-A^{-1}+I=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

MATEMÁTICAS II
EXEMPLOS DE RESPOSTAS/SOLUCIÓNS

2. Números e Álxebra:

Discuta, segundo os valores do parámetro m, o seguinte sistema: $\begin{cases}(m+3)x & - & m^2y & = & 3m, \\ (m+3)x & + & my & = & 3m+6.\end{cases}$

Solución:

A notación F_i indicará "fila i". Unha expresión do tipo $F_i + \alpha F_j$ (na que $\alpha \in \mathbb{R}$ e i é maior que j) quererá dicir que no seguinte paso vaise cambiar a fila i da matriz polo resultado da operación $F_i + \alpha F_j$.

$$\left(\begin{array}{cc|c} m+3 & -m^2 & 3m \\ m+3 & m & 3m+6 \end{array}\right) \overset{F_2 - F_1}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{cc|c} m+3 & -m^2 & 3m \\ 0 & m^2+m & 6 \end{array}\right).$$

Así pois, o sistema que temos que estudar equivale este outro:

$$\begin{cases}(m+3)x & - & m^2y & = & 3m, \\ & & (m^2+m)y & = & 6,\end{cases}$$

para o que, ao ser triangular, é doado facer a discusión. Hai que notar que $m^2 + m = m(m+1) = 0$ se, e só se, $m \in \{-1,0\}$ e que $m + 3 = 0$ se, e só se, $m = -3$. Conseguintemente:

- Se $m \in \mathbb{R} \setminus \{-3,-1,0\}$, entón o sistema é compatible determinado, xa que a súa única solución é
$$y = \frac{6}{m^2+m}, \quad x = \frac{3m + m^2y}{m+3}.$$
- Se $m = -3$, o sistema triangular redúcese a $\begin{cases}-9y & = & -9, \\ 6y & = & 6,\end{cases}$ e é por tanto compatible indeterminado (ten infinitas solucións), porque calquera par $\begin{cases}x = \lambda, \\ y = 1,\end{cases}$ con $\lambda \in \mathbb{R}$, é solución.
- Se $m \in \{-1,0\}$ o sistema é incompatible (non ten solución), porque a segunda ecuación queda $0 = 6$.

MATEMÁTICAS II
EXEMPLOS DE RESPOSTAS/SOLUCIÓNS

Solución alternativa:

Sexan $A = \begin{pmatrix} m+3 & -m^2 \\ m+3 & m \end{pmatrix}$ e $A^* = \left(\begin{array}{cc|c} m+3 & -m^2 & 3m \\ m+3 & m & 3m+6 \end{array}\right)$, respectivamente, a matriz do sistema e a matriz ampliada. Como $m+3$ e m non se anulan á vez, cúmprese que $1 \le \operatorname{rank} A \le \operatorname{rank} A^* \le 2$ e tamén, conseguintemente, que $\operatorname{rank} A = 1$ se, e só se, $\det A = 0$. Dado que

$$\det A = \begin{vmatrix} m+3 & -m^2 \\ m+3 & m \end{vmatrix} = m^2 + 3m + m^3 + 3m^2 = m^3 + 4m^2 + 3m = m(m^2 + 4m + 3) = 0 \Leftrightarrow m = 0 \text{ ou } m = \frac{-4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = \frac{-4 \pm 2}{2} \Leftrightarrow m \in \{-3, -1, 0\},$$

a discusión do sistema queda como segue:

- Caso $m \in \mathbb{R} \setminus \{-3,-1,0\}$: $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} A^* = 2 =$ n.º de incógnitas, polo que o sistema é compatible determinado (ten unha única solución).
- Caso $m = -3$: $\operatorname{rank} A = 1$ e $A^* = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & -9 & -9 \\ 0 & -3 & -3 \end{array}\right)$, co cal tamén $\operatorname{rank} A^* = 1$. Ao ser $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} A^* = 1 <$ n.º de incógnitas, o sistema é compatible indeterminado (ten infinitas solucións).
- Caso $m = -1$: $\operatorname{rank} A = 1$ e $A^* = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & -3 \\ 2 & -1 & 3 \end{array}\right)$. Como $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 12 \neq 0$, sábese que $\operatorname{rank} A^* = 2 > \operatorname{rank} A$, situación na que o sistema é incompatible (non ten solución).
- Caso $m = 0$: $\operatorname{rank} A = 1$ e $A^* = \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 6 \end{array}\right)$. Como $\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 18 \neq 0$, sábese que $\operatorname{rank} A^* = 2 > \operatorname{rank} A$, situación na que, de novo, o sistema é incompatible (non ten solución).

MATEMÁTICAS II
EXEMPLOS DE RESPOSTAS/SOLUCIÓNS

3. Análise:

Determine os valores de a e b que fan que a función $f(x)=\begin{cases}\frac{a-\cos x}{x} & \text{se} \quad x<0,\\ bx & \text{se} \quad x\geq 0\end{cases}$ sexa, primeiro continua, e logo derivable.

Solución:

A función f é derivable, e por tanto continua, en $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ para valores calquera de a e b; só hai que facer entón o estudo no punto $x=0$. Debido a que $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{a-\cos x}{x}$ non é finito cando $a\neq 1$, f non pode ser continua neses casos. Fixemos pois $a=1$ e consideremos

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos x}{x} & \text{se} \quad x<0,\\ bx & \text{se} \quad x\geq 0.\end{cases}$$

- Continuidade: nótese que $f(0)=0$, $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}\frac{1-\cos x}{x} = \lim_{x\to 0^-} \sin x = 0$ (onde se usou a regra de L'Hôpital), e, para calquera valor de $b\in\mathbb{R}$, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} bx = 0$. Por conseguinte, f é continua en $x=0$ se, e soamente se, $(a,b)\in\{1\}\times\mathbb{R}$.
- Derivabilidade: séguese a asumir que $a=1$, co cal f é continua (se non é continua, non pode ser derivable). Temos polo tanto que

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{x\sin x-1+\cos x}{x^2} & \text{se} \quad x<0,\\ b & \text{se} \quad x>0.\end{cases}$$

Como f é continua, $\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-}\frac{x\sin x-1+\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0^-}\frac{\sin x + x\cos x-\sin x}{2x} = \lim_{x\to 0^-}\frac{\cos x}{2} = \frac{1}{2}$ (onde se usou a regra de L'Hôpital) e $\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} b = b$, a función f é derivable en $x=0$ se, e soamente se, $a=1$ e $b=\frac{1}{2}$.

Solución alternativa para o estudo da derivabilidade (empregando a definición de derivada):

Sabemos que $f(x)=\begin{cases}\frac{1-\cos x}{x} & \text{se} \quad x<0,\\ bx & \text{se} \quad x\geq 0.\end{cases}$ xa que a ten que valer 1. Agora, como $\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^-}\frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0^-}\frac{\sin x}{2x} = \lim_{x\to 0^-}\frac{\cos x}{2} = \frac{1}{2}$ (onde se usou dúas veces a regra de L'Hôpital) e $\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{bx}{x} = b$, conclúese que a función f é derivable en $x=0$ se, e soamente se, $a=1$ e $b=\frac{1}{2}$.

MATEMÁTICAS II
EXEMPLOS DE RESPOSTAS/SOLUCIÓNS

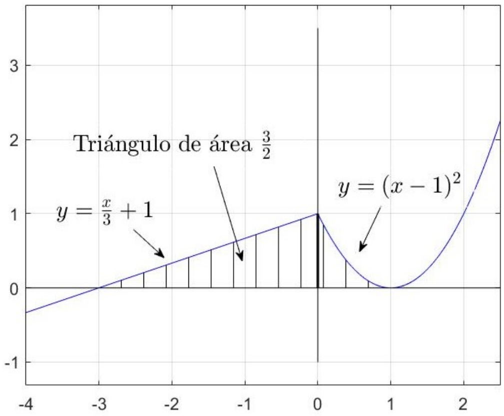
4. Análise:

a) Calcule a área da rexión encerrada polo eixe X e a gráfica de $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}x + 1 & \text{se} \quad x < 0, \\ (x-1)^2 & \text{se} \quad x \geq 0. \end{cases}$

b) Calcule $\int x\sqrt{x^2-1}\,dx$.

Solución:

4.a)



Tendo en conta que $y = \frac{x}{3} + 1$ é a recta que pasa por $(-3{,}0)$ e por $(0{,}1)$ e que $y = (x-1)^2$ é a parábola de vértice $(1{,}0)$ que pasa polos puntos $(0{,}1)$ e $(2{,}1)$, chégase ao debuxo da esquerda, onde está raiada a rexión cuxa área se pide.

Agora é claro que esa área virá dada por

$$A = \frac{3}{2} + \int_0^1 (x-1)^2 dx = \frac{3}{2} + \left[\frac{(x-1)^3}{3}\right]_0^1 = \frac{3}{2} + \frac{1}{3}$$
$$= \frac{9+2}{6} = \frac{11}{6}\ \mathrm{u}^2 = 1.8\overline{3}\ \mathrm{u}^2,$$

onde u indica "unidade de lonxitude".

4.b) Mediante o cambio de variable

$$z = x^2 - 1, \quad dz = 2x\,dx,$$

obtense

$$\int x\sqrt{x^2-1}\,dx = \frac{1}{2}\int \sqrt{z}\,dz = \frac{1}{2}\frac{z^{3/2}}{3/2} + C = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\sqrt{z^3} + C = \frac{1}{3}\sqrt{(x^2-1)^3} + C.$$

MATEMÁTICAS II
EXEMPLOS DE RESPOSTAS/SOLUCIÓNS

5. Xeometría:

Sexan r a recta de vector director $\vec{d}_r(1,0,3)$ que pasa por $P(1,0,0)$ e $\pi: -2x+y+z=0$. Pídese a posición relativa de r e π. En caso de que se corten, achar o punto de corte.

Solución:

O vector $\vec{n}_\pi(-2,1,1)$ é normal ao plano π. Como $\vec{d}_r \cdot \vec{n}_\pi = -2+3=1 \neq 0$, os vectores $\vec{d}_r$ e $\vec{n}_\pi$ non son perpendiculares, e polo tanto r e π córtanse nun punto.
As ecuacións paramétricas de r son

$$r: \begin{cases} x = 1+\lambda, \\ y = \quad 0, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \\ z = \quad 3\lambda, \end{cases}$$

Substituíndo na ecuación do plano obtense o valor de λ que proporcionará o punto de corte:

$$-2(1+\lambda)+3\lambda = 0 \Leftrightarrow -2+\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2.$$

Téñense así os valores seguintes:

$$x = 1+\lambda = 3,$$
$$y = 0,$$
$$z = 3\lambda = 6,$$

é dicir, r e π córtanse no punto $Q(3,0,6)$.

MATEMÁTICAS II
EXEMPLOS DE RESPOSTAS/SOLUCIÓNS

6. Xeometría:

a) Calcule k sabendo que os vectores $\vec{u}(2,0,0)$, $\vec{v}(0,k,1)$ e $\vec{w}(2,2,2)$ son coplanarios.

b) Obteña a ecuación implícita do plano π que pasa por $P(1,0,0)$ e contén a $r: x-1=\frac{y}{-4}=\frac{z+1}{3}$.

Solución:

6.a) Ao ser coplanarios, son linealmente dependentes, de xeito que o valor de k pode ser calculado como segue:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & k & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 4k-4=0 \Leftrightarrow k=1.$$

6.b) $Q(1,0,-1) \in r$ e $\vec{d}_r(1,-4,3)$ é vector director de r. O plano π pasa por $P(1,0,0)$ e está xerado por $\vec{d}_r(1,-4,3)$ e $\overrightarrow{PQ}(0,0,-1)$, é dicir,

$$\pi: \begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ 1 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \pi: 4x-4+y=0 \Leftrightarrow \pi: 4x+y-4=0.$$

MATEMÁTICAS II
EXEMPLOS DE RESPOSTAS/SOLUCIÓNS

7. Estatística e Probabilidade:
O 57% dos estudantes matriculados na Universidade de Cambridge son naturais do Reino Unido e, de entre todos eses, o 83% aproban con honores. Ademais, a porcentaxe global de aprobados con honores é do 80%. Calcular a probabilidade de que un estudante elixido ao azar non nacese no Reino Unido sabendo que aprobou con honores.

Solución:

Se $RU =$ "ser natural do Reino Unido" e $AH =$ "aprobar con honores", tense a seguinte táboa de continxencia:

	$\boldsymbol{AH}$	$\boldsymbol{\overline{AH}}$	
$\boldsymbol{RU}$	$57 \times \mathbf{0.83} = 47.31$		$100 \times \mathbf{0.57} = 57$
$\boldsymbol{\overline{RU}}$	32.69		
	$100 \times \mathbf{0.80} = 80$		$\mathbf{100}$

A probabilidade pedida é polo tanto $P(\overline{RU}|AH) = \frac{32.69}{80} = 0.408625$.

MATEMÁTICAS II
EXEMPLOS DE RESPOSTAS/SOLUCIÓNS

8. Estatística e Probabilidade:

a) Nunha determinada poboación de árbores, o 20% teñen máis de 30 anos. Se se elixen 40 árbores ao azar, calcule a probabilidade de que soamente 4 deles teñan máis de 30 anos. O número total de árbores é tan grande que se pode asumir elección con substitución.

b) Se X segue unha distribución normal de media 15 e $P(X \leq 18) = 0.6915$, cal é a desviación típica?

Solución:

Sexa $X =$ "número de árbores de máis de 30 anos, de entre os 40".

$$X \longrightarrow B(n,p), \quad \text{con } n = 40 \text{ e } p = 0.2.$$

Logo $q = 1 - p = 0.8$, co que a probabilidade pedida é

$$P(X=4) = \binom{40}{4} p^4 q^{36} = \frac{40 \cdot 39 \cdot 38 \cdot 37}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} (0.2)^4 (0.8)^{36} = 10 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 37 \cdot (0.2)^4 (0.8)^{36}$$
$$= 91300 \cdot (0.2)^4 (0.8)^{36} \approx 0.0475.$$

8.b)

$$X \longrightarrow N(15, \sigma) \Longrightarrow Z = \frac{X - 15}{\sigma} \longrightarrow N(0,1).$$

Polo tanto,

$$P(X \leq 18) = 0.6915 \Leftrightarrow P\left(Z \leq \frac{18 - 15}{\sigma}\right) = 0.6915 \Leftrightarrow P\left(Z \leq \frac{3}{\sigma}\right) = 0.6915.$$

Indo agora á táboa da distribución $N(0,1)$, vese que $\frac{3}{\sigma} \approx 0.5$, de onde $\sigma \approx \frac{3}{0.5} = 6$.