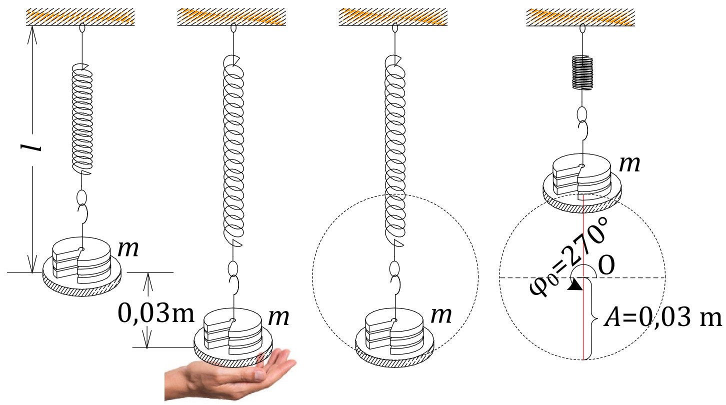
VIBRACIÓNS E ONDAS. PROBLEMAS

1. Unha masa m colga dun resorte, que se estira 0,03 m na dirección vertical e se solta en t = 0, deixándoo oscilar libremente, co resultado dunha oscilación cada 0,2 s. Calcula:

a) A velocidade do extremo libre ao cabo de 19 s.

b) A aceleración do extremo libre ao cabo de 19 s. (Considérase que o amortecemento é desprezable).

c) Representa graficamente a variación da velocidade e aceleración co tempo.



a) O resorte, ao quedar en liberdade, describe un MHS, tendo por elongación y a expresión: $y = A \cdot \text{sen}(\omega\, t + \varphi_0)$, onde A é a amplitude, ω a frecuencia angular e φ_0 a fase inicial, que calculamos a partir das condicións iniciais:

$$y = A \cdot \text{sen}(\omega\, t + \varphi_0) \xrightarrow{\text{para } t=0 \ \to\ y=-A} -A = A \cdot \text{sen}(0 + \varphi_0) \ \to\ \varphi_0 = \frac{3\,\pi}{2}\ \text{rad}$$

A velocidade é a derivada da elongación con respecto ao tempo:

$$v = \frac{\text{d}y}{\text{d}t} \xrightarrow{y = A \cdot \text{sen}\left(\omega\, t + \frac{3\,\pi}{2}\right)} v = A \cdot \omega \cdot \cos\left(\omega\, t + \frac{3\,\pi}{2}\right)$$

$$v = A \cdot \omega \cdot \cos\left(\omega\, t + \frac{3\,\pi}{2}\right) \xrightarrow[\omega = \frac{2\,\pi}{T} \xrightarrow{T = 0{,}2\,\text{s}} \omega = \frac{2\,\pi}{0{,}2} = 10\,\pi\ \text{s}^{-1}]{A = 0{,}03\,\text{m} \atop t = 19\,\text{s}} v = 0{,}03 \cdot 10 \cdot \pi \cdot \cos\left(10 \cdot \pi \cdot 19 + \frac{3\,\pi}{2}\right) = 0\ \text{m s}^{-1}$$

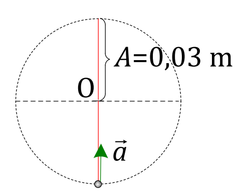
$$\boxed{\vec{v} = \vec{0}\ (\text{m s}^{-1})}$$

b) A aceleración é a derivada da velocidade con respecto ao tempo:

$$a = \frac{\text{d}v}{\text{d}t} \xrightarrow{v = 0{,}3 \cdot \pi \cdot \cos\left(10 \cdot \pi \cdot t + \frac{3\,\pi}{2}\right)} a = -0{,}3 \cdot \pi \cdot 10 \cdot \pi \cdot \text{sen}\left(10 \cdot \pi \cdot t + \frac{3\,\pi}{2}\right)$$

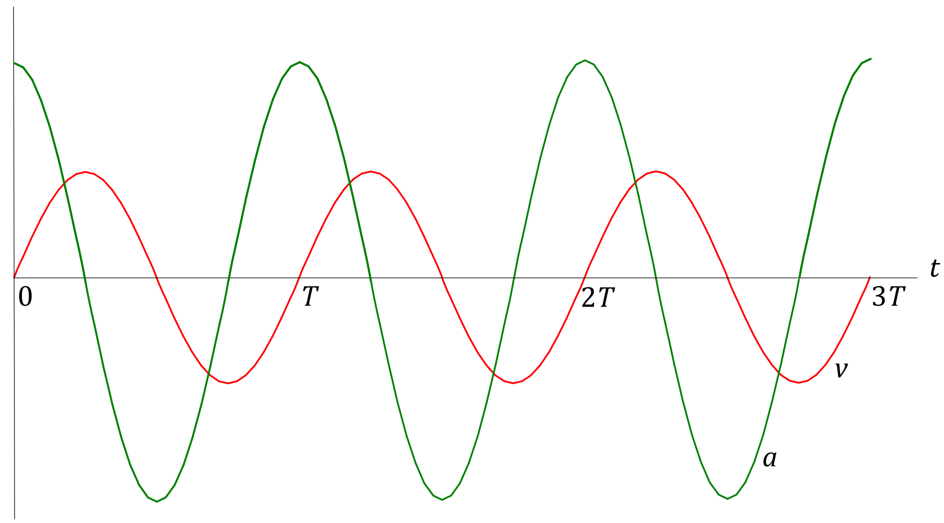
$$a = -0{,}3 \cdot \pi \cdot 10 \cdot \pi \cdot \text{sen}\left(10 \cdot \pi \cdot t + \frac{3\,\pi}{2}\right) \xrightarrow{t = 19\,\text{s}} a = -0{,}3 \cdot \pi \cdot 10 \cdot \pi \cdot \text{sen}\left(10 \cdot \pi \cdot 19 + \frac{3\,\pi}{2}\right) = 29{,}6\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$$

$$\boxed{\vec{a} = 29{,}6\ \vec{j}\ (\text{m} \cdot \text{s}^{-2})}$$



Transcorrido o tempo t = 19 s, a masa m colgada do resorte atópase na situación inicial, xa que $t = 19$ s é un número n enteiro de períodos T: $t = n \cdot T \to n = 19/0{,}2 = 95$, sendo a súa velocidade nula e a súa aceleración máxima.

c) As representacións gráficas da velocidade e da aceleración en función do tempo serían como as seguintes:


t
0
T
2T
3T
v
a

2. Un corpo de 50 g de masa, sometido a un movemento harmónico simple, realiza 10 oscilacións por segundo. Calcula:

a) A aceleración no centro de oscilación.

b) A aceleración nun dos seus extremos, sabendo que a amplitude do movemento é de 9 cm.

c) A enerxía cinética no centro de oscilación.

a) A ecuación da elongación y do movemento harmónico simple é: $y = A \cdot \text{sen}(\omega t + \varphi_0)$, onde A é a amplitude, ω a frecuencia angular e φ_0 a fase inicial.

A velocidade v é a derivada da elongación con respecto ao tempo:

$$v = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \xrightarrow{y = A \cdot \text{sen}(\omega t + \varphi_0)} v = A \cdot \omega \cdot \cos(\omega t + \varphi_0)$$

E a aceleración a é a derivada da velocidade con respecto ao tempo:

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \xrightarrow{v = A \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_0)} a = -A \cdot \omega^2 \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \varphi_0) \xrightarrow{y = A \cdot \text{sen}(\omega t + \varphi_0)} a = -\omega^2 \cdot y \rightarrow \begin{cases} a = \omega^2 \cdot y \\ \vec{a} = -\omega^2 \cdot \vec{y} \end{cases}$$

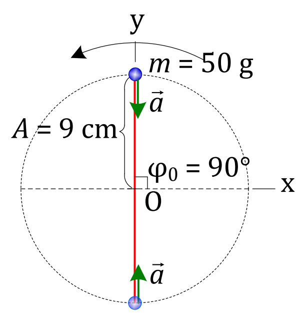
$$a = \omega^2 \cdot y \xrightarrow{\text{Centro de oscilación: } y = 0 \text{ m}} a = 0 \text{ m s}^{-2}$$

$$\vec{a} = -\omega^2 \cdot \vec{y} \xrightarrow{\text{Centro de oscilación: } y = 0 \text{ m}} \boxed{\vec{a} = 0\,\vec{j}\,(\text{m} \cdot \text{s}^{-2})}$$

b)

$$a = \omega^2 \cdot y \xrightarrow[\text{Extremos de oscilación: } y = A = 9 \text{ cm}]{\omega = \frac{2\pi}{T} \xrightarrow{T = \frac{t}{n} = \frac{1}{10} = 0{,}1 \text{ s}} \omega = \frac{2\pi}{0{,}1} = 20\,\pi \text{ s}^{-1}} a = (20 \cdot \pi)^2 \cdot 9 \cdot 10^{-2} = 3{,}55 \cdot 10^2 \text{ m s}^{-2}$$

$$\vec{a} = -\omega^2 \cdot \vec{y} \rightarrow \begin{cases} \xrightarrow{\text{Extremos de oscilación: } y = A = 9 \text{ cm}} \boxed{\vec{a} = -3{,}55 \cdot 10^2\,\vec{j}\,(\text{m} \cdot \text{s}^{-2})} \\ \xrightarrow{\text{Extremos de oscilación: } y = -A = -9 \text{ cm}} \boxed{\vec{a} = 3{,}55 \cdot 10^2\,\vec{j}\,(\text{m} \cdot \text{s}^{-2})} \end{cases}$$



c) No centro de oscilación, toda a enerxía mecánica está en forma de enerxía cinética: $E_\text{k} = \frac{1}{2} \cdot k \cdot (A^2 - y^2) \xrightarrow{\text{centro de oscilación, } y = 0} E_\text{k} = \frac{1}{2} \cdot k \cdot A^2$

$$\left. \begin{array}{l} E_\text{k} = \frac{1}{2} \cdot k \cdot A^2 \\ k = m \cdot \omega^2 \xrightarrow[\omega = 20 \cdot \pi \text{ s}^{-1}]{m = 50 \cdot 10^{-3} \text{ kg}} k = 50 \cdot 10^{-3} \cdot (20 \cdot \pi)^2 = 197{,}4 \text{ N m}^{-1} \\ A = 9 \cdot 10^{-2} \text{ m} \end{array} \right\} \rightarrow E_\text{k} = \frac{1}{2} \cdot 197{,}4 \cdot (9 \cdot 10^{-2})^2 = 0{,}80 \text{ J}$$

$$\boxed{E_\text{k} = 0{,}80 \text{ J}}$$

3. Un corpo de 10 g de masa desprázase cun movemento harmónico simple de 80 Hz de frecuencia e de 1 m de amplitude. Acha:

a) A enerxía potencial cando a elongación é igual a 70 cm.

b) O módulo da velocidade cando se atopa nesa posición.

c) O módulo da aceleración nesa posición.

a)

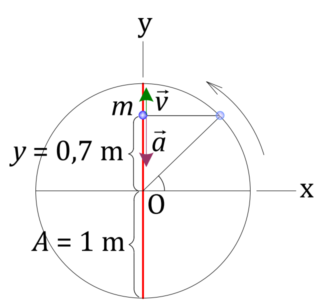
$$\left.\begin{array}{l} E_p = \frac{1}{2} \cdot k \cdot y^2 \xrightarrow{y = 70 \cdot 10^{-2}\ \text{m}} E_p = \frac{1}{2} \cdot k \cdot \left(70 \cdot 10^{-2}\right)^2 \\ k = m \cdot \omega^2 \xrightarrow[\omega = 2\pi f \xrightarrow{f = 80\ \text{Hz}} \omega = 160\ \pi\ \text{rad s}^{-1}]{m = 10 \cdot 10^{-3}\ \text{kg}} k = 10 \cdot 10^{-3} \cdot (160\ \pi)^2 = 2526{,}6\ \text{N m}^{-1} \end{array}\right\} \rightarrow \boxed{E_p = 619{,}0\ \text{J}}$$

b) $E_{\text{total}} = E_k + E_p = E_{\text{k máxima}} = E_{\text{p máxima}}$.

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \\ E_k = E_{\text{total}} - E_p \end{array}\right\} \rightarrow \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = E_{\text{total}} - E_p \rightarrow v = \sqrt{\frac{2 \cdot \left(E_{\text{total}} - E_p\right)}{m}} \\ E_{\text{total}} = E_{\text{p máx.}} = \frac{1}{2} \cdot k \cdot A^2 \xrightarrow[A = 1\ \text{m}]{k = 2526{,}6\ \text{N m}^{-1}} E_{\text{p máx.}} = \frac{1}{2} \cdot 2526{,}6 \cdot 1^2 = 1263{,}3\ \text{J} \\ E_p\big|_{y = 70\ \text{cm}} = 619{,}0\ \text{J} \end{array}\right\} \rightarrow v = \sqrt{\frac{2 \cdot (1263{,}3 - 619{,}0)}{10 \cdot 10^{-3}}}$$

$$\boxed{v = 3{,}60 \cdot 10^2\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}}$$

c) $a = \omega^2 \cdot y \xrightarrow[y = 0{,}70\ \text{m}]{\omega = 2\pi f \xrightarrow{f = 80\ \text{Hz}} \omega = 2\pi\, 80 = 160\ \pi\ \text{s}^{-1}} a = (160\ \pi)^2 \cdot 0{,}70 \rightarrow \boxed{a = 1{,}77 \cdot 10^5\ \text{m s}^{-2}}$



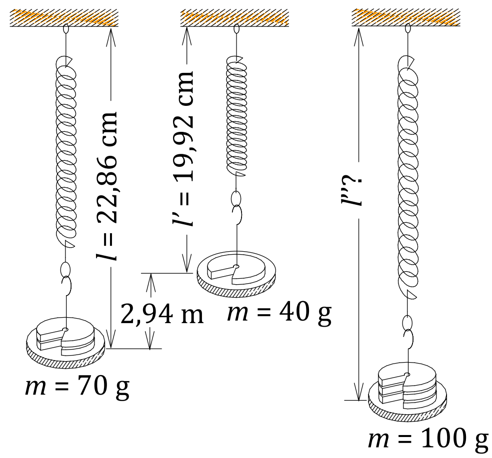
4. Un resorte mide 22,86 cm cando se lle colga unha masa de 70 g e 19,92 cm cando se lle colga unha masa de 40 g. Acha:

a) A constante do resorte.

b) A frecuencia das oscilacións se se lle colga unha masa de 80 g

c) A lonxitude do resorte ao colgarlle unha masa de 100 g.

Dato: g = 9,8 m s^{-2}.



a)

$$\left.\begin{array}{l}\vec{F}_{\text{recuperadora}} = -k\cdot\Delta\vec{l}\\ \vec{F}_{\text{aplicada}} = -\vec{F}_{\text{recuperadora}}\end{array}\right\} \rightarrow \vec{F}_{\text{aplicada}} = k\cdot\Delta\vec{l}$$

$$F = k\cdot\Delta l \xrightarrow[\Delta l=(22,86-19,92)\cdot 10^{-2}=2,94\cdot 10^{-2}\ \text{m}]{F=(70-40)\cdot 10^{-3}\cdot 9,8=2,94\cdot 10^{-1}\ \text{N}} 2,94\cdot 10^{-1} = k\cdot 2,94\cdot 10^{-2} \rightarrow \boxed{k = 10\ \text{N m}^{-1}}$$

b) $$\nu = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\,\pi}\cdot\sqrt{\frac{k}{m}} \xrightarrow[m=80\cdot 10^{-3}\ \text{kg}]{k=10\ \text{N m}^{-1}} \nu = \frac{1}{2\,\pi}\cdot\sqrt{\frac{10}{80\cdot 10^{-3}}} \rightarrow \boxed{\nu = 1,78\ \text{Hz}}$$

c)

$$F = k\cdot(l-l_0) \xrightarrow[\substack{k=10\ \text{N m}^{-1}\\ l=22,86\cdot 10^{-2}\ \text{m}}]{F=70\cdot 10^{-3}\cdot 9,8=6,86\cdot 10^{-1}\ \text{N}} 6,86\cdot 10^{-1} = 10\cdot(22,86\cdot 10^{-2}-l_0) \rightarrow l_0 = 1,6\cdot 10^{-1}\ \text{m}$$

$$F = k\cdot(l''-l_0) \xrightarrow[\substack{k=10\ \text{N m}^{-1}\\ l_0=1,6\cdot 10^{-1}\ \text{m}}]{F=100\cdot 10^{-3}\cdot 9,8=9,8\cdot 10^{-1}\ \text{N}} 9,8\cdot 10^{-1} = 10\cdot(l''-1,6\cdot 10^{-1}) \rightarrow \boxed{l'' = 25,8\cdot 10^{-2}\ \text{m}}$$

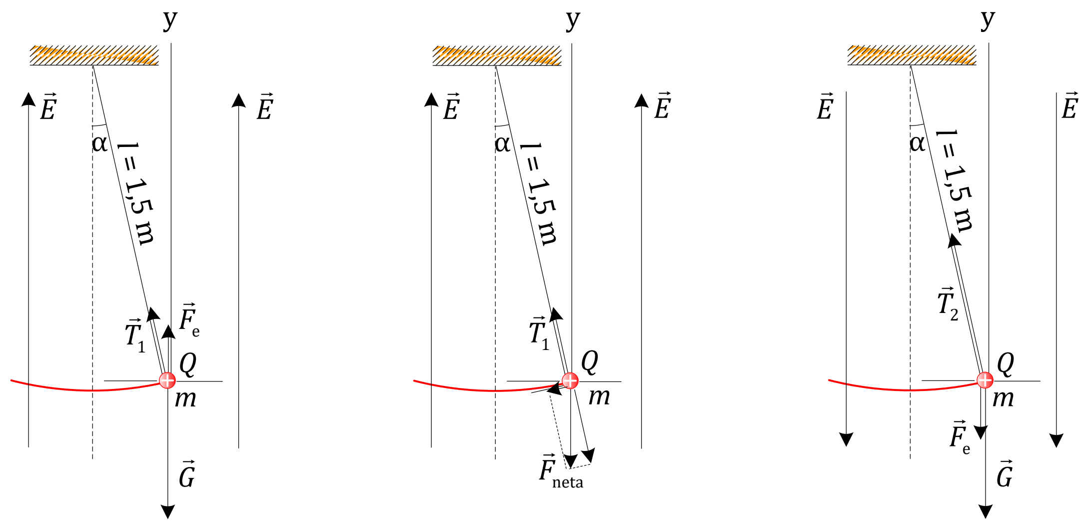
5. Un péndulo eléctrico está formado por unha esfera metálica de 1 g colgada dun fío moi fino de 1'5 m. Faise oscilar nunha rexión na que existe un campo eléctrico uniforme vertical e cárgase a esfera con $+1{,}3 \cdot 10^{-8}$ C. Cando o campo é vertical de abaixo arriba, a esfera efectúa 100 oscilacións en 314 s e se o campo está dirixido de arriba abaixo, tarda 207 s en dar 100 oscilacións. Calcula:

a) Intensidade do campo eléctrico.

b) Valor de "g" no lugar da experiencia.

c) O período do péndulo se a experiencia se fai na Lúa, en ausencia de campo electrostático.

(Dato: $g_L = 1{,}63$ m s^{-2})



a)

$$\left.\begin{array}{l} T_1 = 2\,\pi\sqrt{\dfrac{l}{a_1}} \\ T_1 = \dfrac{t_1}{n} \xrightarrow[n=100\text{ oscilacións}]{t_1=314\text{ s}} T = \dfrac{314}{100} = 3{,}14\text{ s} \\ l = 1{,}5\text{ m} \end{array}\right\} \rightarrow 3{,}14 = 2\,\pi\sqrt{\dfrac{1{,}5}{a_1}} \rightarrow a_1 = 6{,}0\text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$$

$$\left.\begin{array}{l} T_2 = 2\,\pi\sqrt{\dfrac{l}{a_2}} \\ T_2 = \dfrac{t_2}{n} \xrightarrow[n=100\text{ oscilacións}]{t_2=207\text{ s}} T_2 = \dfrac{207}{100} = 2{,}07\text{ s} \\ l = 1{,}5\text{ m} \end{array}\right\} \rightarrow 2{,}07 = 2\,\pi\sqrt{\dfrac{1{,}5}{a_2}} \rightarrow a_2 = 13{,}82\text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$$

$$\left.\begin{array}{l} m\cdot g - Q\cdot E = m\cdot a_1 \xrightarrow{\substack{m=1\cdot 10^{-3}\text{ kg} \\ Q=1{,}3\cdot 10^{-8}\text{ C} \\ a_1=6{,}0\text{ m s}^{-2}}} 1\cdot 10^{-3}\cdot g - 1{,}3\cdot 10^{-8}\cdot E = 1\cdot 10^{-3}\cdot 6{,}0 \\ m\cdot g + Q\cdot E = m\cdot a_2 \xrightarrow{\substack{m=1\cdot 10^{-3}\text{ kg} \\ Q=1{,}3\cdot 10^{-8}\text{ C} \\ a_2=13{,}82\text{ m s}^{-2}}} 1\cdot 10^{-3}\cdot g + 1{,}3\cdot 10^{-8}\cdot E = 1\cdot 10^{-3}\cdot 13{,}82 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} \boxed{E = 3\cdot 10^{5}\text{ N/C}} \\ g = 9{,}9\text{ m/s}^2 \end{array}\right.$$

b) $\boxed{g = 9{,}9\text{ m/s}^2}$

c) $T_{\text{Lúa}} = 2\,\pi\sqrt{\dfrac{l}{g_{\text{Lúa}}}} \xrightarrow[g_{\text{Lúa}}=1{,}63\text{ m s}^{-2}]{l=1{,}5\text{ m}} T_{\text{Lúa}} = 2\,\pi\sqrt{\dfrac{1{,}5}{1{,}63}} \rightarrow \boxed{T = 6{,}0\text{ s}}$

6. Un punto material de 20 g de masa oscila cun M.H.S de amplitude 2 cm e frecuencia 10 Hz, coincidindo o inicio dos tempos co punto onde a velocidade é nula. Calcula:

a) O módulo da velocidade e da aceleración máximas.

b) O módulo da velocidade e da aceleración no instante t = 1/120 s

c) A enerxía mecánica nese instante.

a) $v = \omega \cdot \sqrt{A^2 - y^2} \xrightarrow{\text{para } y=0 \rightarrow v = v_{\text{máx.}}} v_{\text{max.}} = \omega \cdot A$

$$\left.\begin{array}{l} v_{\text{máx.}} = \omega \cdot A \\ \omega = 2\,\pi\, f \xrightarrow{f = 10\text{ s}^{-1}} \omega = 2\,\pi\, 10\text{ s}^{-1} \\ A = 2 \cdot 10^{-2}\text{ m} \end{array}\right\} \rightarrow v_{\text{máx.}} = 2\,\pi \cdot 10 \cdot 2 \cdot 10^{-2} \rightarrow \boxed{v_{\text{máx.}} = 0{,}4\,\pi\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}}$$

$a = \omega^2 \cdot y \xrightarrow{\text{para } y=A \rightarrow a = a_{\text{máx.}}} a_{\text{max.}} = \omega^2 \cdot A$

$$\left.\begin{array}{l} a_{\text{máx.}} = \omega^2 \cdot A \\ \omega = 2\,\pi\, f \xrightarrow{f = 10\text{ s}^{-1}} \omega = 2\,\pi\, 10\text{ s}^{-1} \\ A = 2 \cdot 10^{-2}\text{ m} \end{array}\right\} \rightarrow a_{\text{máx.}} = (2\,\pi \cdot 10)^2 \cdot 2 \cdot 10^{-2} \rightarrow \boxed{a_{\text{máx.}} = 8\,\pi^2\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}}$$

b) $v = \omega \cdot \sqrt{A^2 - y^2}$

$$\left.\begin{array}{l} y_{t=1/120\text{ s}} = A\,\text{sen}\left(\omega\, t + \varphi_0\right) \xrightarrow[t=1/120\text{ s}]{A = 2\cdot 10^{-2}\text{ m},\ \omega = 20\,\pi\text{ s}^{-1}} y_{t=125\text{ s}} = 2 \cdot 10^{-2} \cdot \text{sen}\left(20\,\pi \cdot \left(\dfrac{1}{120}\right) + \varphi_0\right) \\ y = A\,\text{sen}\left(\omega\, t + \varphi_0\right) \xrightarrow{\text{para } t=0 \rightarrow \begin{cases} y = A \text{ ou} \\ y = -A \end{cases}} \begin{cases} A = A\,\text{sen}\left(\omega \cdot 0 + \varphi_0\right) \rightarrow \varphi_0 = \dfrac{\pi}{2}\text{ rad} \\ -A = A\,\text{sen}\left(\omega \cdot 0 + \varphi_0\right) \rightarrow \varphi_0 = -\dfrac{\pi}{2}\text{ rad} \end{cases} \end{array}\right\} \rightarrow y = 1{,}7 \cdot 10^{-2}\text{ m}$$

$$v\big|_{t=1/120\text{ s}} = \omega \cdot \sqrt{A^2 - y^2} \xrightarrow[y = 1{,}7\cdot 10^{-2}\text{ m}]{\omega = 20\,\pi\text{ s}^{-1},\ A = 2\cdot 10^{-2}\text{ m}} v\big|_{t=1/120\text{ s}} = 20\,\pi \cdot \sqrt{\left(2\cdot 10^{-2}\right)^2 - \left(1{,}7\cdot 10^{-2}\right)^2} \rightarrow \boxed{v\big|_{t=1/120\text{ s}} = 6{,}6\text{ m s}^{-1}}$$

$$a\big|_{t=1/120\text{ s}} = \omega^2 \cdot y \xrightarrow[y = 1{,}7\cdot 10^{-2}\text{ m}]{\omega = 20\,\pi\text{ s}^{-1}} a\big|_{t=1/120\text{ s}} = (20\,\pi)^2 \cdot 1{,}7 \cdot 10^{-2} \rightarrow \boxed{a\big|_{t=1/120\text{ s}} = 67{,}1\text{ m}\cdot\text{s}^{-2}}$$

c)

$$\left.\begin{array}{l} E_{\text{m}} = \dfrac{1}{2} \cdot k \cdot A^2 \\ k = m\,\omega^2 \xrightarrow[\omega = 20\,\pi\text{ s}^{-1}]{m = 20\cdot 10^{-3}\text{ kg}} k = 20 \cdot 10^{-3} \cdot (20\,\pi)^2\text{ N/m} \end{array}\right\} \xrightarrow[A = 2\cdot 10^{-2}\text{ m}]{k = 79{,}0\text{ N m}^{-1}} E_{\text{m}} = \dfrac{1}{2} \cdot 79{,}0 \cdot \left(2 \cdot 10^{-2}\right)^2 = \boxed{1{,}6 \cdot 10^{-2}\text{ J}}$$

7. Un péndulo está constituído por unha pequena esfera, de dimensións que consideramos desprezables, de masa 200 g, suspendida dun fío inextensible, e sen masa apreciable, de 2 m de longo. Calcula:

a) O período para pequenas amplitudes.

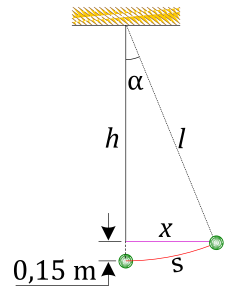
b) Supoñamos que no momento de máxima elongación a esfera elévase 15 cm por encima do plano horizontal que pasa pola posición de equilibrio. Calcula a velocidade ao pasar pola vertical.

c) Xustifica e representa graficamente as variacións da enerxía cinética e potencial nun movemento harmónico simple. Pode considerarse un m.h.s. o que describe o péndulo nas condicións do apartado b)?

Dato: g = 9,8 m·s⁻².

a) O período do péndulo simple, supoñendo un movemento harmónico simple, é:

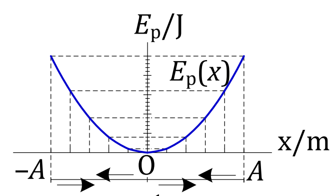
$$T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \xrightarrow{l=2\,\mathrm{m}} T=2\pi\sqrt{\frac{2}{9{,}8}} \rightarrow \boxed{T=2{,}84\,\mathrm{s}}$$



b) Ao desprezar as perdas de enerxía por rozamento, aplícase o principio de conservación da enerxía mecánica de xeito que no punto máis alto estará toda en forma de E_P e no máis baixo en forma de E_k: E_p inicial = E_k final.

$$m\cdot g\cdot h=\frac{1}{2}\cdot m\cdot v^2 \rightarrow v=\sqrt{2\cdot g\cdot h} \xrightarrow[h=0{,}15\,\mathrm{m}]{g=9{,}8\,\mathrm{m\,s^{-2}}} v=\sqrt{2\cdot 9{,}8\cdot 0{,}15} \rightarrow \boxed{v=1{,}72\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}}$$

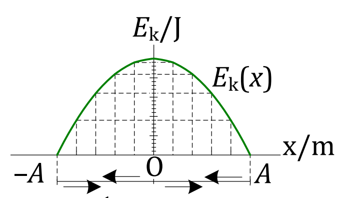
c) A enerxía potencial, $E_p=\frac{1}{2}\cdot k\cdot x^2$, depende da posición: ten un valor máximo nos extremos: $x = \pm A$, sendo $E_p = (1/2)\, k A^2$; e mínimo no centro: $x = 0$, sendo $E_p = 0$. A súa variación é parabólica (polinomio en grao dous), coas ramas cara a valores crecentes de E_p (coeficiente en grao dous positivo) e co vértice na orixe (ausencia de termos de grao menor que dous). A súa representación gráfica é a indicada na figura que aparece á marxe.



$$E_p=\frac{1}{2}\cdot k\cdot x^2$$

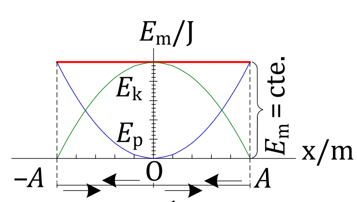
Na expresión da enerxía potencial elástica vemos que esta é sempre positiva, o que nos di que un resorte almacena enerxía, tanto se se alonga como se se comprime.

A enerxía cinética, $E_k=\frac{1}{2}\cdot k\cdot\left(A^2-x^2\right)$, depende da posición: é máxima no centro de oscilación: $x = 0$, sendo $E_k = (1/2)\cdot k\cdot A^2$; e mínima nos extremos: $x = \pm A$, sendo $E_k = 0$. A súa variación é parabólica (polinomio en grao dous), coas ramas cara a valores decrecentes de E_k (coeficiente en grao dous negativo) e co vértice no eixe da E_k e desprazado da orixe (so presenza do termo independente). A representación gráfica é a indicada na figura que aparece á marxe.



$$E_k=\frac{1}{2}\cdot k\cdot\left(A^2-x^2\right)$$

A enerxía mecánica, $E_k=\frac{1}{2}\cdot k\cdot A^2$, permanece constante (se non hai rozamento) xa que a amplitude do movemento permanece constante: durante unha oscilación hai un intercambio continuo de enerxía cinética e potencial elástica, permanecendo constante a súa suma.

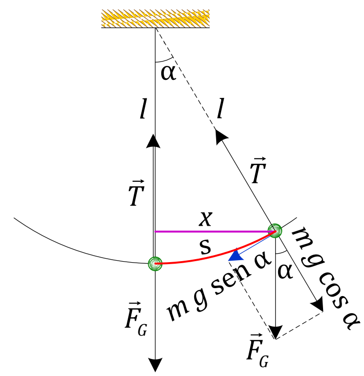


$$E_{\text{mecánica}}=\frac{1}{2}\cdot k\cdot A^2$$

Sabemos que a traxectoria do m.h.s. é rectilínea: $\vec{F}=-k\cdot x\,\vec{i}$. Porén, a traxectoria da masa m é a dun arco de circunferencia, que se podemos confundir coa corda correspondente comportaríase como se fose un m.h.s.

A forza que actúa sobre m é a do seu peso, $\vec{F}_G$, e a da tensión do fío, $\vec{T}$. Descompoñemos o peso en dúas direccións:

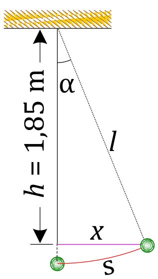
- Unha, na dirección do fío (que se anula coa tensión): $m \cdot g \cdot \cos \alpha$.
- Outra, na dirección perpendicular á anterior: $m \cdot g \cdot \operatorname{sen} \alpha$. Esta compoñente é a resultante das forzas que actúan sobre m, orixinando o movemento oscilante do péndulo. Como é esta forza?



$F = m \cdot g \cdot \operatorname{sen} \alpha \xrightarrow{\operatorname{sen} \alpha = \frac{x}{l}} F = m \cdot g \cdot \frac{x}{l}$. A súa expresión vectorial é: $\vec{F} = -m \cdot g \cdot \frac{\vec{x}}{l}$: O signo menos indica que o sentido de $\vec{F}$ e contrario ao de $\vec{x}$.

Para pequenos ángulos, a corda s confúndese co arco x e a traxectoria pode considerarse rectilínea e o movemento harmónico simple, sendo $k = m \cdot g / l$:

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{sen} \alpha = \dfrac{x}{l} \\ \alpha = \dfrac{s}{l} \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{se } \operatorname{sen} \alpha = \alpha \text{ (en radiáns)}} x = s$$



Calculamos o valor do ángulo α:

$$\alpha\text{: } \cos \alpha = \frac{h}{l} \xrightarrow[l = 2\text{ m}]{h = 2 - 0{,}15 = 1{,}85\text{ m}} \cos \alpha = \frac{1{,}85}{2} \rightarrow \alpha = 0{,}390 \text{ rad} = 22{,}3°$$

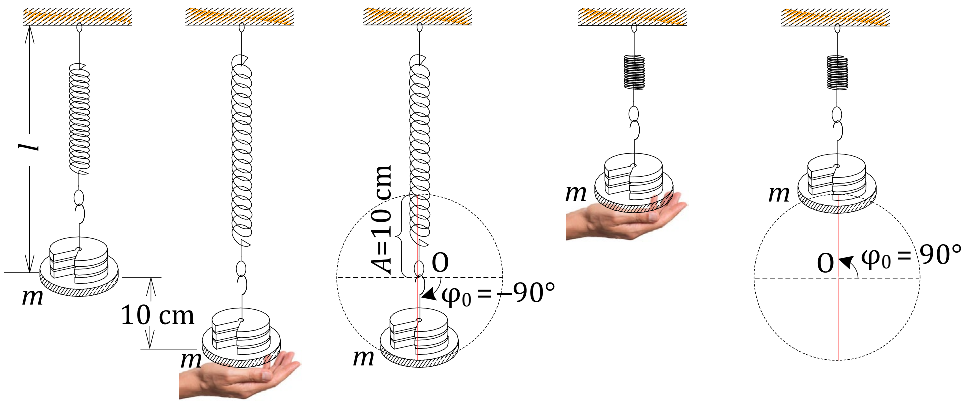
$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{sen} 22{,}3° = 0{,}380 \\ 22{,}3° = 0{,}390 \text{ rad} \end{array}\right\} \rightarrow \operatorname{sen} \alpha \neq \alpha, \text{sendo o erro do } 2{,}6\%$$

8. Unha masa de 2 kg suxeita a un resorte de constante recuperadora $k = 5 \cdot 10^3$ N/m sepárase 10 cm da posición de equilibrio e déixase en liberdade. Calcula:

a) A ecuación do movemento.

b) A aceleración aos 0,1 s de iniciado o movemento.

c) A enerxía potencial aos 0,1 s de iniciado o movemento.



a) A ecuación do movemento (aquela que relaciona coordenada e tempo) dunha partícula que describe un m.h.s. é: $\vec{y} = A \cdot \operatorname{sen}(\omega t + \varphi_0)\,\vec{j}$.

A fase inicial φ_0 obtémola a partir das condicións iniciais:

$$y = A \cdot \operatorname{sen}(\omega t + \varphi_0) \xrightarrow{\text{para } t=0} \begin{cases} \xrightarrow{y=-A} -A = A \cdot \operatorname{sen}(0 + \varphi_0) \rightarrow \varphi_0 = 270° = -90° = -\pi/2 \text{ rad} \\ \xrightarrow{y=A} A = A \cdot \operatorname{sen}(0 + \varphi_0) \rightarrow \varphi_0 = 90° = \pi/2 \text{ rad} \end{cases}$$

A frecuencia angular calcúlase a partir da constante elástica do resorte e da masa oscilante:

$$k = m \cdot \omega^2 \rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \xrightarrow[m=2\text{ kg}]{k=5\cdot 10^3 \text{ N m}^{-1}} \omega = \sqrt{\frac{5 \cdot 10^3}{2}} \rightarrow \omega = 50 \text{ s}^{-1}$$

Coas magnitudes calculadas escribimos a ecuación de movemento:

$$\boxed{\vec{y} = 0{,}10 \cdot \operatorname{sen}\left(50\,t \pm \frac{\pi}{2}\right)\vec{j}\ (\text{m})}$$

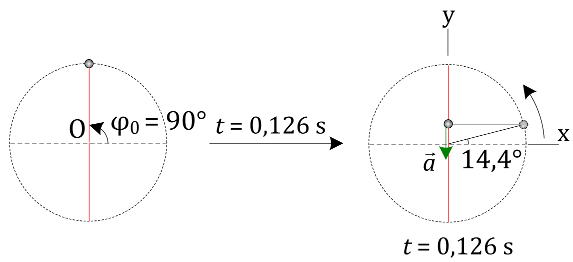
b) A aceleración é a derivada da velocidade con respecto ao tempo; e a velocidade é a derivada da elongación con respecto ao tempo:

$$v = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \xrightarrow{y=0{,}10\cdot\operatorname{sen}\left(50t\pm\frac{\pi}{2}\right)} v = 0{,}10 \cdot 50 \cdot \cos\left(50\,t \pm \frac{\pi}{2}\right)$$

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \xrightarrow{v=5{,}0\cdot\cos\left(50t\pm\frac{\pi}{2}\right)} a = -5{,}0 \cdot 50 \cdot \operatorname{sen}\left(50\,t \pm \frac{\pi}{2}\right)$$

Substituíndo para t = 0,1 s obtense: a = 70,9 m s^{-2}.

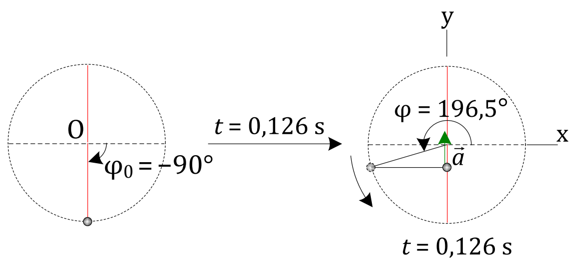
$$\vec{a} = -5{,}0 \cdot 50 \cdot \operatorname{sen}\left(5{,}0 \pm \frac{\pi}{2}\right)\vec{j} \xrightarrow{\text{para}} \begin{cases} \xrightarrow{\varphi_0 = \pi/2 \text{ rad}} \boxed{\vec{a} = -70{,}9\,\vec{j} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}} \\ \xrightarrow{\varphi_0 = -\pi/2 \text{ rad}} \boxed{\vec{a} = 70{,}9\,\vec{j} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}} \end{cases}$$



$$\varphi_{t=0{,}126\,\mathrm{s}} = 50\cdot 0{,}1 + \pi/2 \;\rightarrow\; \varphi_{t=0{,}126\,\mathrm{s}} = 6{,}57\ \mathrm{rad} = 376{,}4°$$

$$\mathrm{N^o\ de\ voltas} = \frac{376^{\mathrm{o}}}{360^{\mathrm{o}}\,/\mathrm{volta}} = 1{,}04 = 1 + 0{,}04$$

$$0{,}04\ \mathrm{voltas} \xrightarrow{0{,}04\ \mathrm{voltas}\cdot 360^{\mathrm{o}}\,/\mathrm{volta}} 14{,}4^{\mathrm{o}}$$



$$\varphi_{t=0{,}126\,\mathrm{s}} = 50\cdot 0{,}1 - \pi/2 \;\rightarrow\; \varphi_{t=0{,}126\,\mathrm{s}} = 3{,}43\ \mathrm{rad} = 196{,}5°$$

c)

$$\left.\begin{array}{l} E_{\mathrm{p}} = \dfrac{1}{2}\cdot k\cdot y^2 \\ k = 5\cdot 10^3\ \mathrm{N\ m^{-1}} \\ \vec{y} = 0{,}10\cdot \mathrm{sen}\left(50\,t \pm \dfrac{\pi}{2}\right)\vec{j} \xrightarrow{t=0{,}1\,\mathrm{s}} \vec{y} = \begin{cases} 2{,}8\cdot 10^{-2}\ \vec{j}\ (\mathrm{m}) \\ -2{,}8\cdot 10^{-2}\ \vec{j}\ (\mathrm{m}) \end{cases} \end{array}\right\} \rightarrow E_{\mathrm{p}} = \frac{1}{2}\cdot 5\cdot 10^3\cdot\left(2{,}8\cdot 10^{-2}\right)^2 = \boxed{1{,}96\ \mathrm{J}}$$

9. Un punto material de 500 g describe un MHS de 10 cm de amplitude realizando dúas oscilacións completas cada segundo. Calcula:

a) A elongación de dito punto no instante 0,5 s despois de alcanzar a máxima separación.

b) A velocidade e aceleración 0,5 s despois de alcanzar a máxima separación.

c) A enerxía cinética que terá o punto móbil ao pasar pola posición de equilibrio.

a) A partir da frecuencia f calculamos o período T: $T=\dfrac{1}{f} \xrightarrow{f=2\,\text{Hz}} T=\dfrac{1}{2} \rightarrow T=0{,}5\ \text{s}$.

Como o tempo t = 0,5 s é o de un período, a elongación do punto material, transcorrido este tempo t, coincide co valor inicial: $y = A$ = 10 cm.

Tamén podemos obter a elongación a partir da ecuación do movemento: $\vec{y}=A\cdot\operatorname{sen}(\omega t+\varphi_0)\,\vec{j}$.
A frecuencia angular ω calcúlase a partir da frecuencia f:

$$\omega=2\,\pi\cdot f \xrightarrow{f=2\,\text{Hz}} \omega=2\,\pi\cdot 2 \rightarrow \omega=4\,\pi\ \text{rad s}^{-1}$$

A fase inicial φ_0 obtémola a partir das condicións iniciais:

$$y=A\cdot\operatorname{sen}(\omega t+\varphi_0) \xrightarrow{\text{para } t=0} \begin{cases} \xrightarrow{y=-A} -A=A\cdot\operatorname{sen}(0+\varphi_0) \rightarrow \varphi_0=270°=-90°=-\pi/2\ \text{rad} \\ \xrightarrow{y=A} A=A\cdot\operatorname{sen}(0+\varphi_0) \rightarrow \varphi_0=90°=\pi/2\ \text{rad} \end{cases}$$

Coas magnitudes calculadas escribimos a ecuación do movemento:

$$\vec{y}=0{,}10\cdot\operatorname{sen}\left(4\,\pi\,t\pm\frac{\pi}{2}\right)\vec{j}\ (\text{m})$$

$$\vec{y}=0{,}10\cdot\operatorname{sen}\left(4\,\pi\cdot 0{,}5\pm\frac{\pi}{2}\right)\vec{j}=\pm 0{,}10\,\vec{j}\ (\text{m}) \rightarrow \boxed{y=0{,}10\ \text{m}}$$

b) Como no instante t = 0,5 s, o punto material se encontra nun dos extremos da súa traxectoria:

- a velocidade é nula: $v=\omega\cdot\sqrt{A^2-y^2} \xrightarrow{y=A} v=0\ \text{m s}^{-1}$; e
- a súa aceleración é máxima: $a = \omega^2 \cdot y = (4\,\pi)^2 \cdot 0{,}1 = 15{,}8\ \text{m/s}^2$.

Tamén se poden obter estas magnitudes derivando a ecuación do movemento:

$$\vec{v}=\frac{\text{d}y}{\text{d}t}\vec{j} \xrightarrow{y=0{,}10\cdot\operatorname{sen}\left(4\pi t\pm\frac{\pi}{2}\right)} \vec{v}=0{,}10\cdot 4\cdot\pi\cdot\cos\left(4\,\pi\,t\pm\frac{\pi}{2}\right)\vec{j} \xrightarrow{t=0{,}5\,\text{s}} \boxed{\vec{v}=\vec{0}\,(\text{m s}^{-1})}$$

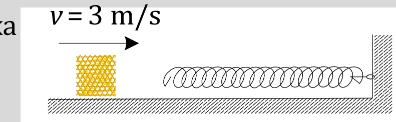
$$\vec{a}=\frac{\text{d}v}{\text{d}t}\vec{j} \xrightarrow{v=0{,}4\,\pi\cdot\cos\left(4\pi t\pm\frac{\pi}{2}\right)} a=-0{,}4\,\pi\cdot 4\,\pi\ \cdot\operatorname{sen}\left(4\,\pi\,t\pm\frac{\pi}{2}\right)\vec{j} \xrightarrow{t=0{,}5\,\text{s}} \boxed{\vec{a}=\pm 15{,}8\,\vec{j}\,(\text{m}\cdot\text{s}^{-2})}$$

c) No centro de oscilación, toda a enerxía mecánica está en forma de enerxía cinética:

$$E_\text{k}=\frac{1}{2}\cdot k\cdot(A^2-y^2) \xrightarrow{\text{centro de oscilación, } y=0} E_\text{k}=\frac{1}{2}\cdot k\cdot A^2$$

$$\left.\begin{array}{l} E_\text{k}=\dfrac{1}{2}\cdot k\cdot A^2 \\ k=m\,\omega^2 \xrightarrow[\omega=4\,\pi\,\text{rad s}^{-1}]{m=0{,}5\,\text{kg}} k=0{,}5\cdot(4\,\pi)^2\ \text{N/m} \end{array}\right\} \xrightarrow[A=10\cdot 10^{-2}\,\text{m}]{k=79{,}0\ \text{N m}^{-1}} E_\text{k}=\frac{1}{2}\cdot 79{,}0\cdot(10\cdot 10^{-2})^2 \rightarrow \boxed{E_\text{k}=0{,}40\ \text{J}}$$

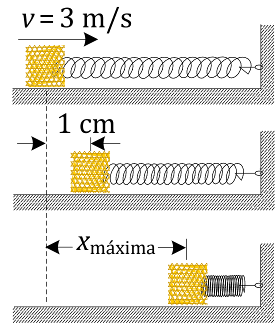
10. No sistema da figura, un corpo de 2 kg móvese a 3 m·s⁻¹ sobre un plano horizontal.



a) Determina a velocidade do corpo ao comprimirse o resorte 1 cm, cuxa constante elástica é k = 10 000 N·m⁻¹. (Non se ten en conta a fricción).

b) Cal é a compresión máxima do resorte?

c) A que distancia se igualan as enerxías cinética e potencial do resorte?



a) No momento do contacto do corpo co resorte, toda a enerxía do conxunto atópase na forma de enerxía cinética, E_c. Ao irse comprimindo o resorte, esta enerxía cinética vaise transformando en enerxía potencial, E_p, de xeito que cando estea no máximo de compresión toda a enerxía estará en forma potencial: $E_{\text{c máxima}} = E_{\text{p máxima}} = E_{\text{mecánica}}$.

$$E_{\text{c máxima}} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \xrightarrow[v = 3\ \text{m s}^{-1}]{m = 2\ \text{kg}} E_{\text{c máxima}} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3^2 \rightarrow E_{\text{c máxima}} = 9\ \text{J}$$

Nas posicións intermedias:

$$\left.\begin{array}{l} E_{\text{m}} = E_{\text{c}} + E_{\text{p}} \\ E_{\text{m}} = E_{\text{c máxima}} = 9\ \text{J} \\ E_{\text{c}} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \xrightarrow{m = 2\ \text{kg}} E_{\text{c}} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot v^2 \\ E_{\text{p}} = \frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2 \xrightarrow[x = 10^{-2}\ \text{m}]{k = 10000\ \text{N m}^{-1}} E_{\text{p}} = 0{,}5\ \text{J} \end{array}\right\} \rightarrow 9 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot v^2 + 0{,}5 \rightarrow \boxed{v = 2{,}92\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}}$$

b) No momento de máxima compresión, a enerxía cinética é 0, polo que toda a enerxía mecánica estará en forma de enerxía potencial:

$$E_{\text{p}} = \frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2 \xrightarrow[k = 10000\ \text{N m}^{-1}]{E_{\text{p máxima}} = E_{\text{m}} = 9\ \text{J}} 9 = \frac{1}{2} \cdot 10000 \cdot x^2_{\text{máxima}} \rightarrow \boxed{x_{\text{máxima}} = 0{,}04\ \text{m}}$$

c)

$$E_{\text{c}} = E_{\text{p}} \xrightarrow[E_{\text{p}} = \frac{1}{2} \cdot k \cdot x'^2]{E_{\text{c}} = \frac{1}{2} \cdot k \cdot \left(A^2 - x'^2\right)} \frac{1}{2} \cdot k \cdot \left(A^2 - x'^2\right) = \frac{1}{2} \cdot k \cdot x'^2 \rightarrow x' = \frac{A}{\sqrt{2}} \xrightarrow{A = x_{\text{máxima}} = 0{,}04\ \text{m}} \boxed{x' = 0{,}03\ \text{m}}$$

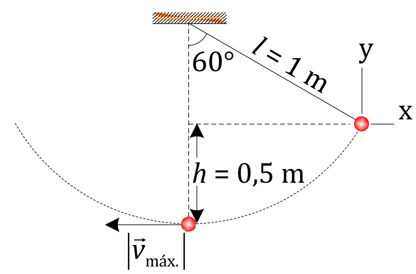
11. Un péndulo ten unha lonxitude de 1 m e un corpo colgado no seu extremo de 1 kg é desviado da súa posición de equilibrio quedando solto a medio metro de altura.

a) Calcula a súa velocidade no punto máis baixo aplicando o principio de conservación da enerxía mecánica.

b) Calcula a súa velocidade valorando a aplicación das ecuacións do M.H.S.

c) Deduce en que condicións o movemento do péndulo sería harmónico simple e calcula a lonxitude que debería ter o fío para que o período fose de 1 s. (Dato: g = 9,8 m·s⁻²).

a) Supoñendo que o corpo colgado oscila sen rozamento, consérvase a enerxía mecánica, podendo escribir: $E_{\text{k máxima}} = E_{\text{p máxima}}$.



$$\frac{1}{2}\cdot m\cdot v^2 = m\cdot g\cdot h \rightarrow v=\sqrt{2\cdot g\cdot h}$$

$$v=\sqrt{2\cdot g\cdot h} \xrightarrow[h=0{,}5\text{ m}]{g=9{,}8\text{ m s}^{-2}} v=\sqrt{2\cdot 9{,}8\cdot 0.5} \rightarrow \boxed{v=3{,}13\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}}$$

b) Nun M.H.S., o módulo da velocidade máxima obtense coa expresión: $v_{\text{máxima}} = \omega \cdot A$.

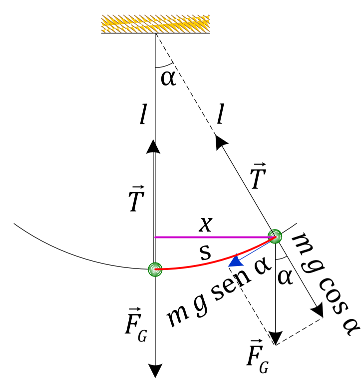
$$\left.\begin{array}{l} v_{\text{máxima}} = \omega\cdot A \\ \omega=\dfrac{2\pi}{T} \xrightarrow{T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}} \omega=\sqrt{\dfrac{l}{g}} \xrightarrow[l=1\text{ m}]{g=9{,}8\text{ m s}^{-2}} \omega=\sqrt{\dfrac{1}{9{,}8}}=3{,}13\text{ rad s}^{-1} \\ A=\sqrt{l^2-(l-h)^2} \xrightarrow[h=0{,}5\text{ m}]{l=1\text{ m}} A=\sqrt{1^2-(1-0{,}5)^2}=0{,}87\text{ m} \end{array}\right\} \rightarrow v_{\text{máxima}}=3{,}13\cdot 0{,}87=\boxed{2{,}72\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}}$$

Comentario: Vemos unha diferenza apreciable no cálculo por ambos métodos. O método das enerxías sempre é aplicable, mentres que o amplo ángulo de 60° fai desaconsellable o uso das ecuacións do MHS. O movemento non é un M.H.S.

c) Sabemos que a traxectoria do m.h.s. é rectilínea: $\vec{F}=-k\cdot x\,\vec{i}$. Porén, a traxectoria da masa m é a dun arco de circunferencia, que se podemos confundir coa corda correspondente comportaríase como se fose un m.h.s.

A forza que actúa sobre m é a do seu peso, $\vec{F}_G$, e a da tensión do fío, $\vec{T}$. Descompoñemos o peso en dúas direccións:

- Unha, na dirección do fío (que se anula coa tensión): $m\cdot g\cdot\cos\alpha$.
- Outra, na dirección perpendicular á anterior: $m\cdot g\cdot\text{sen}\,\alpha$. Esta compoñente é a resultante das forzas que actúan sobre m, orixinando o movemento oscilante do péndulo. Como é esta forza?



$F=m\cdot g\cdot\text{sen}\,\alpha \xrightarrow{\text{sen}\,\alpha=\frac{x}{l}} F=m\cdot g\cdot\dfrac{x}{l}$. A súa expresión vectorial é: $\vec{F}=-m\cdot g\cdot\dfrac{\vec{x}}{l}$: O signo menos indica que o sentido de $\vec{F}$ e contrario ao de $\vec{x}$.

Para pequenos ángulos, a corda s confúndese co arco x e a traxectoria pode considerarse rectilínea e o movemento é harmónico simple, sendo $k = m \cdot g/l$:

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{sen}\alpha = \dfrac{x}{l} \\ \alpha = \dfrac{s}{l} \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{se } \operatorname{sen}\alpha = \alpha \text{ (en radiáns)}} x = s$$

Calculamos o valor do ángulo α:

$$\cos\alpha = \frac{l - h}{l} \xrightarrow[h = 0{,}5\ \text{m}]{l = 1\ \text{m}} \cos\alpha = \frac{1 - 0{,}5}{1} \rightarrow \alpha = 1{,}047\ \text{rad} = 60{,}0°$$

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{sen} 60{,}0° = 0{,}886 \\ 60{,}0° = 1{,}047\ \text{rad} \end{array}\right\} \rightarrow \operatorname{sen}\alpha \neq \alpha$$

Aplicando a ecuación do período do péndulo, poderíamos calcular a lonxitude l necesaria para conseguir que o período T sexa de 1 s:

$$T = 2\,\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \xrightarrow[g = 9{,}8\ \text{m s}^{-2}]{T = 1\ \text{s}} 1 = 2\,\pi\sqrt{\frac{l}{9{,}8}} \rightarrow \boxed{l = 0{,}25\ \text{m}}$$

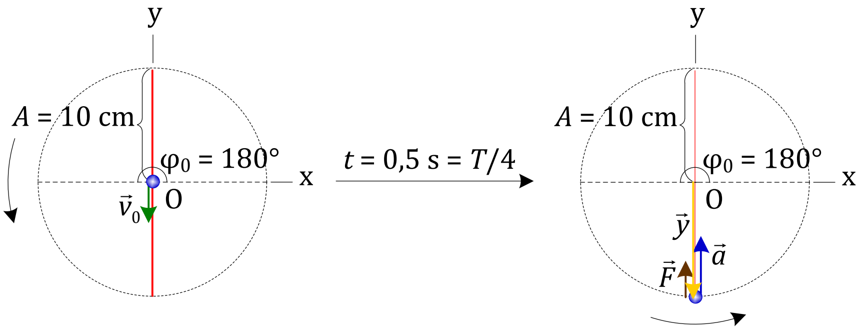
12. Unha partícula de masa 50 g describe un M.H.S. de amplitude 10 cm e período 2,0 s. Se comezamos a estudar o movemento no instante no que pasa pola posición de equilibrio e se dirixe cara ás elongacións negativas, calcula:

a) A posición, a velocidade, a aceleración e a forza elástica no instante 0,50 s.

b) O tempo transcorrido ata que pasa por vez primeira pola posición 5,0 cm.

c) A enerxía cinética en función do tempo.

a) Como t = 0,5 s corresponde á cuarta parte do período T:

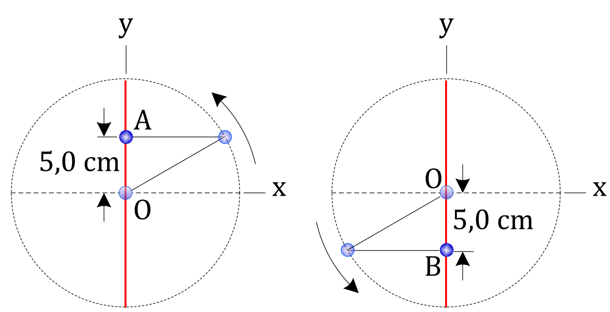


- A posición da partícula $\vec{y}$ vai ser a do extremo da traxectoria: $\vec{y} = -A\,\vec{j} \xrightarrow{A=10\text{ cm}} \boxed{\vec{y} = -10\,\vec{j}\,(\text{cm})}$.
- A velocidade $\vec{v}$ da partícula é nula, $\vec{v} = \vec{0}$: $v = \omega\sqrt{A^2 - y^2} \xrightarrow{y=-A} \boxed{v = 0\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}}$.
- A aceleración $\vec{a}$ da partícula vale:

$$\vec{a} = -\omega^2\,\vec{y} \xrightarrow[\vec{y}=-A\,\vec{j}=-0{,}10\,\vec{j}\,(\text{m})]{\omega=\frac{2\pi}{T}\to\omega=\frac{2\pi}{2}=\pi\text{ rad s}^{-1}} \vec{a} = -\pi^2\cdot\left(-0{,}10\,\vec{j}\right) \to \boxed{\vec{a} = 0{,}10\,\pi^2\,\vec{j}\left(\text{m}\cdot\text{s}^{-2}\right)}$$

- A forza elástica é: $\vec{F} = m\cdot\vec{a} \xrightarrow[\vec{a}=0{,}10\,\pi^2\,\vec{j}\,(\text{m s}^{-2})]{m=50\cdot10^{-3}\text{ kg}} \vec{F} = 50\cdot10^{-3}\cdot0{,}10\cdot\pi^2\,\vec{j} \to \boxed{\vec{F} = 5\cdot10^{-3}\cdot\pi^2\,\vec{j}\,(\text{N})}$

b) O tempo que a partícula tarda en percorrer 5,0 cm, partindo desde o centro de oscilación, é:



$$y = A\cdot\text{sen}\left(\omega\,t + \varphi_0\right) \xrightarrow[\substack{\omega=\pi\text{ rad s}^{-1}\\ \varphi_0=0\text{ rad}}]{\substack{y=5{,}0\cdot10^{-2}\text{ m}\\ A=10\cdot10^{-2}\text{ m}}} 5{,}0\cdot10^{-2} = 10\cdot10^{-2}\cdot\text{sen}\left(\pi\,t\right) \to t = 0{,}167\text{ s}$$

Este tempo calculado é o que tarda a partícula cando se despraza desde o centro de oscilación O ata A, no sentido das elongacións positivas. Igual tempo é o que tarda en ir desde o centro de oscilación O ata B, no sentido das elongacións negativas que, como no instante inicial pasa pola posición de equilibrio e se dirixe cara ás elongacións negativas, sería cando pasa por primeira vez pola posición −5,0 cm. Desde o instante inicial, a partícula tarda en pasar pola posición 5,0 cm o tempo de (1+ 0,167) s = $\boxed{1{,}167\text{ s}}$.

c) $E_\text{c} = \dfrac{1}{2}\cdot m\cdot v^2$

Se tomamos como ecuación do movemento: $\vec{y} = A \cdot \text{sen}\left(\omega\, t + \varphi_0\right) \vec{j}$, a velocidade vén dada pola expresión: $\vec{v} = A \cdot \omega \cdot \cos\left(\omega\, t + \varphi_0\right) \vec{j}$.

A fase inicial φ_0 obtémola a partir das condicións iniciais:

$$y = A \cdot \text{sen}\left(\omega\, t + \varphi_0\right) \xrightarrow[\text{(movéndose cara a elongacións negativos)}]{\text{para } t = 0 \to y = 0} 0 = A \cdot \text{sen}\left(0 + \varphi_0\right) \to \varphi_0 = 180° = \pi \text{ rad}$$

Coas magnitudes calculadas escribimos a ecuación do movemento, $\vec{y} = 0{,}10 \cdot \text{sen}\left(\pi\, t + \pi\right) \vec{j}\ (\text{m})$, e obtemos a velocidade en función do tempo:

$$v = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \xrightarrow{y = 0{,}10 \cdot \text{sen}(\pi\, t + \pi)} v = 0{,}10 \cdot \pi \cdot \cos\left(\pi\, t + \pi\right)$$

$$E_\text{c} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \xrightarrow[v = 0{,}10 \cdot \pi \cdot \cos(\pi\, t + \pi)]{m = 50 \cdot 10^3 \text{ kg}} E_\text{c} = \frac{1}{2} \cdot 50 \cdot 10^{-3} \cdot \left(0{,}10 \cdot \pi \cdot \cos\left(\pi\, t + \pi\right)\right)^2 \to \boxed{E_\text{c} = 2{,}47 \cdot 10^{-3} \cdot \cos^2\left(\pi\, t + \pi\right)}$$

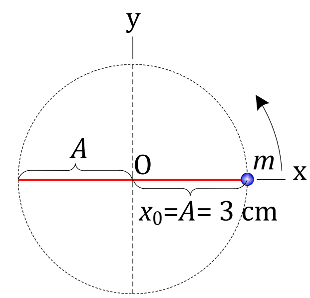
13. A aceleración dun punto material que se move sobre o eixe X vén dada pola expresión: $\vec{a} = -9\,\vec{x}$, onde x se mide en cm e a en cm·s⁻². Sabendo que a amplitude do movemento é 3 cm e que no instante inicial a elongación é máxima para $x > 0$, calcula:

a) A ecuación do movemento do punto material.

b) A velocidade e a aceleración máximas. Indica os puntos da traxectoria aos que corresponden estes valores.

c) Os puntos da traxectoria no que se iguala a enerxía cinética á enerxía potencial elástica.

a) Cando a aceleración dun punto material é da forma $\vec{a} = -\omega^2\,\vec{x}$, posúe un movemento harmónico simple, que ten por ecuación do movemento a expresión: $\vec{x} = A \cdot \text{sen}(\omega\, t + \varphi_0)\,\vec{i}$.



Relacionando a expresión $\vec{a} = -\omega^2\,\vec{x}$ co dato da aceleración $\vec{a} = -9\,\vec{x}$ do exercicio resulta: ω = 3 s⁻¹.

A fase inicial φ_0 obtémola a partir das condicións iniciais:

$$x = A \cdot \text{sen}(\omega\, t + \varphi_0) \xrightarrow{\text{para } t=0 \rightarrow x=A} A = A \cdot \text{sen}(0 + \varphi_0) \rightarrow \varphi_0 = 90° = \frac{\pi}{2}\,\text{rad}$$

$$\boxed{\vec{x} = 3 \cdot 10^{-2} \cdot \text{sen}\left(3\,t + \frac{\pi}{2}\right)\vec{i}\ (\text{m})}\ .$$

b) $v = \omega\sqrt{A^2 - x^2} \xrightarrow{v_{\text{máximo}} \text{ cando } x=0} v_{\text{máxima}} = \omega\, A \xrightarrow[A=3\cdot 10^{-2}\ \text{m}]{\omega = 3\ \text{rad s}^{-1}} \boxed{v_{\text{máxima}} = 9 \cdot 10^{-2}\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}}$ (valor máximo no centro de oscilación)

$a = \omega^2\, x \xrightarrow{a_{\text{máximo}} \text{ cando } x=A} a_{\text{máxima}} = \omega^2\, A \xrightarrow[A=3\cdot 10^{-2}\ \text{m}]{\omega = 3\ \text{rad s}^{-1}} \boxed{a_{\text{máxima}} = 27 \cdot 10^{-2}\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}}$ (valor máximo nos extremos da traxectoria)

c)

$$E_c = E_p \xrightarrow[E_p = \frac{1}{2}\cdot k \cdot x^2]{E_c = \frac{1}{2}\cdot k \cdot (A^2 - x^2)} \frac{1}{2} \cdot k \cdot (A^2 - x^2) = \frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2 \rightarrow x = \frac{A}{\sqrt{2}} \xrightarrow{A = 0{,}03\ \text{m}} \boxed{x = 0{,}02\ \text{m}}$$

14. Un oscilador harmónico ten velocidades de 20 cm·s⁻¹ e de 40 cm·s⁻¹ cando as súas elongacións son, respectivamente, 6,0 cm e 5,0 cm. Calcula:

a) A amplitude, o período e a frecuencia do movemento.

b) A aceleración nas dúas elongacións indicadas.

c) A enerxía mecánica, sabendo que a masa é de 20 g.

a)

$$\left.\begin{array}{l} 20\cdot 10^{-2} = \omega\cdot\sqrt{A^2-\left(6{,}0\cdot 10^{-2}\right)^2} \\ 40\cdot 10^{-2} = \omega\cdot\sqrt{A^2-\left(5{,}0\cdot 10^{-2}\right)^2}\end{array}\right\} \rightarrow \frac{2}{4}=\frac{\sqrt{A^2-36{,}0\cdot 10^{-4}}}{\sqrt{A^2-25{,}0\cdot 10^{-4}}} \rightarrow \boxed{A=6{,}3\cdot 10^{-2}\ \mathrm{m}}$$

$$20\cdot 10^{-2}=2\cdot\pi\cdot f\cdot\sqrt{A^2-\left(6{,}0\cdot 10^{-2}\right)^2} \xrightarrow{A=6{,}3\cdot 10^{-2}\ \mathrm{m}} \boxed{f=1{,}7\ \mathrm{Hz}}$$

$$T=\frac{1}{f} \xrightarrow{f=1{,}7\ \mathrm{Hz}} T=\frac{1}{1{,}7} \rightarrow \boxed{T=0{,}59\ \mathrm{s}}$$

b) $$\vec{a}=-\omega^2\cdot\vec{x} \xrightarrow[\vec{x}=6{,}0\cdot 10^{-2}\,\vec{i}\ (\mathrm{m})]{\omega=2\pi f \xrightarrow{f=1{,}7\ \mathrm{Hz}} \omega=3{,}4\,\pi\ \mathrm{rad\ s^{-1}}} \vec{a}=-\left(3{,}4\cdot\pi\right)^2\cdot 6{,}0\cdot 10^{-2}\,\vec{i} \rightarrow \boxed{\vec{a}=-6{,}9\cdot 10^2\,\vec{i}\ \left(\mathrm{m\cdot s^{-2}}\right)}$$

$$\vec{a}=-\omega^2\cdot\vec{x} \xrightarrow[\vec{x}=5{,}0\cdot 10^{-2}\,\vec{i}\ (\mathrm{m})]{\omega=2\pi f \xrightarrow{f=1{,}7\ \mathrm{Hz}} \omega=3{,}4\,\pi\ \mathrm{rad\ s^{-1}}} \vec{a}=-\left(3{,}4\cdot\pi\right)^2\cdot 5{,}0\cdot 10^{-2}\,\vec{i} \rightarrow \boxed{\vec{a}=-5{,}7\cdot 10^2\,\vec{i}\ \left(\mathrm{m\cdot s^{-2}}\right)}$$

c) Supoñendo ausencia de rozamento, a única forza que actúa é a elástica, que por ser conservativa cumpre a conservación da enerxía mecánica.

$$\left.\begin{array}{l} E_{\mathrm{m}}=\dfrac{1}{2}\cdot k\cdot A^2 \\ k=m\,\omega^2 \xrightarrow[\omega=3{,}4\,\pi\ \mathrm{rad\ s^{-1}}]{m=20\cdot 10^{-3}\ \mathrm{kg}} k=20\cdot 10^{-3}\cdot\left(3{,}4\,\pi\right)^2\ \mathrm{N/m}\end{array}\right\} \xrightarrow[A=2\cdot 10^{-2}\ \mathrm{m}]{k=2{,}28\ \mathrm{N\,m^{-1}}} E_{\mathrm{m}}=\frac{1}{2}\cdot 2{,}28\cdot\left(6{,}3\cdot 10^{-2}\right)^2=\boxed{4{,}5\cdot 10^{-3}\ \mathrm{J}}$$

15. Unha onda unidimensional propágase segundo a ecuación: $y = 2 \cos \{2\pi [(t/4) - (x/1,6)]\}$; onde as distancias "$x$" e "$y$" se miden en metros e o tempo en segundos. Determina:

a) O módulo da velocidade de propagación.

b) A diferenza de fase, nun instante dado, de dúas partículas separadas 120 cm na dirección de avance da onda.

c) A aceleración máxima.

a) A ecuación xeral dunha onda harmónica unidimensional que se propaga no eixe X e que a vibración ten lugar no eixe Y, utilizando a función coseno, é: $y(x,t) = A \cos(\omega t \pm k x)$. Comparando esta ecuación coa ecuación dada, sacamos os seguintes datos: A = 2 m; T = 4 s; λ = 1,6 m. A velocidade v de propagación da onda é:

$$\left.\begin{array}{l} v = \dfrac{x}{t} \rightarrow v = \dfrac{\lambda}{T} \\ \lambda = 1{,}6 \text{ m} \\ T = 4 \text{ s} \end{array}\right\} \rightarrow v = \frac{1{,}6}{4} \rightarrow \boxed{v = 0{,}4 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}}$$

b)

Fase: $\varphi = \left(\dfrac{2\,\pi}{4} t - \dfrac{2\,\pi}{1{,}6} x\right) \text{rad}$

En x_1: $\varphi_1 = \left(\dfrac{2\,\pi}{4} t - \dfrac{2\,\pi}{1{,}6} x_1\right) \text{rad}$

En x_2: $\varphi_2 = \left(\dfrac{2\,\pi}{4} t - \dfrac{2\,\pi}{1{,}6} x_2\right) \text{rad}$

$$|\Delta\varphi| = |\varphi_2 - \varphi_1| \rightarrow |\Delta\varphi| = \left|\left(\frac{2\,\pi}{4} t - \frac{2\,\pi}{1{,}6} x_2\right) - \left(\frac{2\,\pi}{4} t - \frac{2\,\pi}{1{,}6} x_1\right)\right| \rightarrow |\Delta\varphi| = \left|\frac{2\,\pi}{1{,}6}(x_2 - x_1)\right|$$

$$\left.\begin{array}{l} |\Delta\varphi| = \left|\dfrac{2\,\pi}{1{,}6}(x_2 - x_1)\right| \\ |(x_2 - x_1)| = 1{,}20 \text{ m} \end{array}\right\} \rightarrow \boxed{\Delta\varphi = 1{,}5\,\pi \text{ rad}}$$

c) A aceleración obtense derivando dúas veces con respecto ao tempo a ecuación de onda:

$$y = 2\cos\left[(2\,\pi\, t/4) - (2\,\pi\, x/1{,}6)\right]$$

$$v = \frac{\mathrm{d}\,y(x,t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\left\{2\cos\left[(2\,\pi\, t/4) - (2\,\pi\, x/1{,}6)\right]\right\}}{\mathrm{d}t} \rightarrow v = -2\cdot(2\cdot\pi/4)\,\text{sen}\left[(2\,\pi\, t/4) - (2\,\pi\, x/1{,}6)\right]$$

$$a = \frac{\mathrm{d}v(x,t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\left\{-2\cdot(2\,\pi/4)\cdot\text{sen}\left[(2\,\pi\, t/4) - (2\,\pi\, x/1{,}6)\right]\right\}}{\mathrm{d}t}$$

$$a = -2\cdot(2\,\pi/4)^2\cdot\cos\left[(2\,\pi\, t/4) - (2\,\pi\, x/1{,}6)\right]$$

A aceleración en valor absoluto será máxima cando $\cos\left[(2\,\pi\, t/4) - (2\,\pi\, x/1{,}6)\right] = \pm 1$, resultando:

$|a_{\text{máxima}}| = 2\cdot(2\cdot\pi/4)^2 \rightarrow \boxed{|a_{\text{máxima}}| = 4{,}93 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}}$

16. Unha onda harmónica que se propaga por unha corda cunha velocidade de 2,0 m·s⁻¹ no sentido positivo do eixo X, ten unha amplitude de 4,0·10⁻² m e unha frecuencia de 4,0 Hz. Calcula:

a) A ecuación do movemento ondulatorio.

b) A diferenza de fase entre dous estados de vibración da mesma partícula cando o intervalo de tempo transcorrido é de 2,0 s. Razoa se están en fase ou en oposición de fase.

c) A diferenza de fase, nun instante dado, entre dúas partículas separadas 2,25 m. Razoa se están en fase ou en oposición de fase.

a) A ecuación xeral dunha onda harmónica unidimensional que se propaga no sentido positivo do eixe X e que a vibración ten lugar no eixe Y, utilizando a función coseno, é: $y(x,t)=A\cos(\omega t-kx)$.

Cálculo de ω e *k*:

$$\omega=2\pi\cdot\nu \rightarrow \omega=2\pi\cdot 4{,}0 \rightarrow \omega=8{,}0\,\pi\,\mathrm{s^{-1}}$$

$$\left.\begin{array}{l} k=\dfrac{2\pi}{\lambda} \\ \lambda=\dfrac{v}{\nu} \rightarrow \lambda=\dfrac{2{,}0}{4{,}0} \rightarrow \lambda=0{,}5\,\mathrm{m} \end{array}\right\} \rightarrow k=\frac{2\pi}{0{,}5}=4{,}0\,\pi\,\mathrm{m^{-1}}$$

$$\boxed{y(x,t)=4{,}0\cdot 10^{-2}\cdot\cos(8{,}0\,\pi\,t-4{,}0\,\pi\,x)\,\mathrm{m}}$$

b) Fase: $\varphi=(8{,}0\,\pi\,t-4{,}0\,\pi\,x)\,\mathrm{rad}$

En t_1: $\varphi_1=(8{,}0\,\pi\,t_1-4{,}0\,\pi\,x)\,\mathrm{rad}$

En t_2: $\varphi_2=(8{,}0\,\pi\,t_2-4{,}0\,\pi\,x)\,\mathrm{rad}$

$$\Delta\varphi=\varphi_2-\varphi_1 \rightarrow \Delta\varphi=(8{,}0\,\pi\,t_2-4{,}0\,\pi\,x)-(8{,}0\,\pi\,t_1-4{,}0\,\pi\,x) \rightarrow \Delta\varphi=8{,}0\,\pi(t_2-t_1) \rightarrow \boxed{\Delta\varphi=8{,}0\cdot 2\,\pi\,\mathrm{rad}}$$

Dado que Δt = 2,0 s é un múltiplo enteiro de T: $n\,T=\Delta t \rightarrow n\cdot\dfrac{1}{4{,}0}=2{,}0 \rightarrow n=8{,}0$; podemos concluír que $\boxed{\text{ambos estados de vibración están en fase}}$.

Por outra parte, a diferenza de fase é un múltiplo enteiro de 2 π: Δφ = 8,0 · 2 π rad, o que confirma que están en fase. Evidentemente, ambas condicións son equivalentes.

c) En x_1: $\varphi_1=(8{,}0\,\pi\,t-4{,}0\,\pi\,x_1)\,\mathrm{rad}$

En x_2: $\varphi_2=(8{,}0\,\pi\,t-4{,}0\,\pi\,x_2)\,\mathrm{rad}$

$$|\Delta\varphi|=|\varphi_2-\varphi_1| \rightarrow |\Delta\varphi|=|(8{,}0\,\pi\,t-4{,}0\,\pi\,x_2)-(8{,}0\,\pi\,t-4{,}0\,\pi\,x_1)| \rightarrow |\Delta\varphi|=|4{,}0\,\pi(x_2-x_1)| \rightarrow \boxed{\Delta\varphi=9{,}0\,\pi\,\mathrm{rad}}$$

Dado que Δ*x*, Δ*x* = 2,25 m, é un múltiplo impar de λ/2: $n\lambda=\Delta x \rightarrow n\cdot 0{,}5=2{,}25 \rightarrow n=4{,}5 \rightarrow n=\dfrac{9}{2}$, podemos concluír que $\boxed{\text{ambos partículas están en oposición de fase}}$.

Por outra parte, a diferenza de fase é un múltiplo impar de π: Δφ = 9,0 π rad, o que confirma que están en oposición de fase. Evidentemente, ambas condicións son equivalentes.

17. A ecuación dunha onda transversal que se propaga nunha corda é: $y(x,t)=10\,\text{sen}\left[\pi\left(x-0{,}2\,t\right)\right]$, onde x e y se expresan en cm e t en s. Calcula:

a) A amplitude, a lonxitude de onda, a frecuencia e a velocidade de propagación da onda.
b) Os valores máximos da velocidade e da aceleración das partículas da corda.
c) En qué sentido se propaga a onda? Cal será a ecuación da onda transversal se se propaga en sentido contrario? Explícao.

a) $y(x,t)=10\,\text{sen}\left(\pi\,x-0{,}2\,\pi\,t\right)\text{cm}$

Comparando coa ecuación xeral $y(x,t)=A\,\text{sen}\left(k\,x-\omega\,t\right)$ resulta:

$\boxed{A = 0{,}10\text{ m}}$

$$\left.\begin{array}{l} k=\dfrac{2\,\pi}{\lambda} \\ k=\pi\cdot 10^{2}\text{ m}^{-1} \end{array}\right\} \rightarrow \pi\cdot 10^{2}=\frac{2\,\pi}{\lambda} \rightarrow \boxed{\lambda=2\cdot 10^{-2}\text{ m}}$$

$$\left.\begin{array}{l} \omega=2\,\pi\,\nu \\ \omega=0{,}2\,\pi\,\text{s}^{-1} \end{array}\right\} \rightarrow 0{,}2\,\pi=2\,\pi\,\nu \rightarrow \boxed{\nu=0{,}1\,\text{Hz}}$$

$$\left.\begin{array}{l} v=\dfrac{x}{t} \rightarrow v=\dfrac{\lambda}{T}=\lambda\,\nu \\ \lambda=2\cdot 10^{-2}\text{ m} \\ \nu=0{,}1\,\text{Hz} \end{array}\right\} \rightarrow v=2\cdot 10^{-2}\cdot 0{,}1 \rightarrow \boxed{v=2\cdot 10^{-3}\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}}$$

b) $$v=\frac{\text{d}\,y(x,t)}{\text{d}t}=\frac{\text{d}\,y\left[\left(A\,\text{sen}\,(k\,x-\omega t)\right)\right]}{\text{d}t} \rightarrow v=-A\,\omega\cos\left(k\,x-\omega t\right)$$

$$\left|v_{\text{máxima}}\right|=A\,\omega \rightarrow \left|v_{\text{máxima}}\right|=0{,}10\cdot 0{,}2\cdot\pi \rightarrow \boxed{\left|v_{\text{máxima}}\right|=2{,}0\cdot 10^{-2}\,\pi\text{ m s}^{-1}}$$

$$a=\frac{\text{d}v(x,t)}{\text{d}t}=\frac{\text{d}\left[-A\,\omega\cos\left(k\,x-\omega t\right)\right]}{\text{d}t} \rightarrow a=-A\,\omega^{2}\,\text{sen}\left(k\,x-\omega\,t\right)$$

$$\left|a_{\text{máxima}}\right|=A\,\omega^{2} \rightarrow \left|a_{\text{máxima}}\right|=0{,}10\cdot\left(0{,}2\cdot\pi\right)^{2} \rightarrow \boxed{\left|a_{\text{máxima}}\right|=4{,}0\cdot 10^{-3}\cdot\pi^{2}\text{ m s}^{-2}}$$

c) A onda propágase no sentido positivo do eixo X, xa que a velocidade de propagación da onda é positiva. Se se propaga no sentido negativo do eixo X: $y(x,t)=10\,\text{sen}\left[\pi\left(x+0{,}2\,t\right)\right]$, xa que a velocidade de propagación da onda é negativa.

18. Unha onda transversal propágase a través dunha corda. O desprazamento das partículas está dado por: $y(x,t)=0{,}06\,\text{sen}\left[\pi\,x+20\,\pi\,t+\frac{\pi}{2}\right]$ (unidades SI). Calcula:

a) O período da onda.

b) A rapidez de propagación.

c) A ecuación da corda en t = 4 s e o seu gráfico.

a) A función matemática da onda pode escribirse como: $y(x,t)=A\,\text{sen}(k\,x\pm\omega\,t+\varphi_0)$, co signo – para as ondas que viaxan no sentido positivo do eixo X e co signo + para as ondas que viaxan en sentido contrario.

Comparando coa función dada do enunciado: $y(x,t)=0{,}06\,\text{sen}(\pi\,x+20\,\pi\,t+\pi/2)$, obtemos os parámetros da onda:

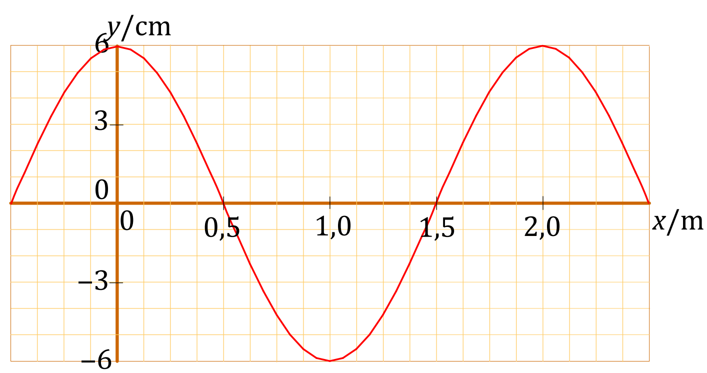
$$\left.\begin{array}{l}\omega=\dfrac{2\,\pi}{T}\rightarrow T=\dfrac{2\,\pi}{\omega}\\ \omega=20\,\pi\ \text{rad/s}\end{array}\right\}\rightarrow T=\frac{2\,\pi}{20\,\pi}\rightarrow \boxed{T=0{,}1\ \text{s}}$$

b)

$$\left.\begin{array}{l}v=\dfrac{x}{t}\rightarrow v=\dfrac{\lambda}{T}\\ \left.\begin{array}{l}k=\dfrac{2\,\pi}{\lambda}\\ k=\pi\ \text{m}^{-1}\end{array}\right\}\rightarrow \pi=\dfrac{2\,\pi}{\lambda}\rightarrow\lambda=2\ \text{m}\\ T=0{,}1\ \text{s}\end{array}\right\}\rightarrow v=\frac{2}{0{,}1}\rightarrow v=20\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$

c) A ecuación da onda en t = 4 s:

$$y(x,4)=0{,}06\,\text{sen}\left(\pi\,x+20\cdot\pi\cdot4+\frac{\pi}{2}\right)\rightarrow y(x,4)=0{,}06\,\text{sen}\left(\pi\,x+\frac{\pi}{2}\right)\rightarrow\boxed{y(x,4)=0{,}06\cos(\pi\,x)\ \text{m}}$$



19. Unha onda harmónica, de frecuencia 30 Hz, desprázase por unha corda situada ao longo do eixo X. A onda oscila nunha dirección Y cunha amplitude de 20 cm. Se a velocidade das ondas na corda é de 120 m·s^{-1} e a densidade lineal é de 60 g·m^{-1}, determina:

a) A lonxitude de onda.
b) A ecuación de onda.
c) A enerxía por unidade de lonxitude.

a) A lonxitude de onda pode obterse a partir da relación entre velocidade e frecuencia:

$$\left.\begin{array}{l} v=\dfrac{x}{t} \rightarrow v=\dfrac{\lambda}{T}=\lambda\,\nu \rightarrow \lambda=\dfrac{v}{\nu} \\ v=120\,\mathrm{m\cdot s^{-1}} \\ \nu=30\,\mathrm{Hz} \end{array}\right\} \rightarrow \lambda=\frac{120}{30} \rightarrow \boxed{\lambda=4\,\mathrm{m}}$$

b) Calculamos e substituímos os valores correspondentes das magnitudes que aparecen na ecuación xeral dunha onda harmónica: $y(x,t)=A\,\mathrm{sen}\,(k\,x \pm \omega\,t)$

$$\left.\begin{array}{l} k=\dfrac{2\,\pi}{\lambda} \\ \lambda=4\,\mathrm{m} \end{array}\right\} \rightarrow k=\frac{2\,\pi}{4} \rightarrow k=\frac{\pi}{2}\ \mathrm{m^{-1}}$$

$$\omega=2\,\pi\,\nu \rightarrow \omega=2\,\pi\,30=60\,\pi\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}}$$

$$\boxed{y(x,t)=0{,}2\cdot\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2}\,x-60\,\pi\,t\right)(\mathrm{m})}$$

c) Para obter a enerxía por unidade de lonxitude, partimos da enerxía dun movemento harmónico simple: $E=\frac{1}{2}\cdot K\cdot A^2=\frac{1}{2}\cdot m\cdot\omega^2\cdot A^2=\frac{1}{2}\cdot m\cdot(2\,\pi\,\nu)^2\cdot A^2=2\,\mu\,l\,\pi^2\cdot\nu^2\cdot A^2$, sendo μ a densidade lineal de masa: $\mu=\frac{m}{l}$.

A enerxía por unidade de lonxitude será:

$$\frac{E}{l}=2\,\mu\,\pi^2\,\nu^2\,A^2 \rightarrow \frac{E}{l}=2\cdot 60\cdot 10^{-3}\cdot\pi^2\cdot 30^2\cdot 0{,}2^2 \rightarrow \boxed{\frac{E}{l}=42{,}6\,\mathrm{J\cdot m^{-1}}}$$

20. Unha onda xerada por unha corda de 0,01 kg·m⁻¹ de densidade lineal vén dada pola ecuación: $y(x,t)=0{,}2\,\text{sen}\,(2\,\pi\,x+50\,\pi\,t)\,\text{m}$. Calcula:

a) A frecuencia da onda.

b) A velocidade de propagación das ondas na corda.

c) A potencia que transporta a onda.

a) A frecuencia obtense da expresión:

$$\omega=2\,\pi\,\nu\;\rightarrow\;\nu=\frac{\omega}{2\,\pi}\;\rightarrow\;\nu=\frac{50\,\pi}{2\,\pi}\;\rightarrow\;\boxed{\nu=25\,\text{Hz}}$$

b) A velocidade de propagación resulta de:

$$\left.\begin{array}{l} v=\dfrac{x}{t}\;\rightarrow\;v=\dfrac{\lambda}{T}=\lambda\,\nu \\ \left.\begin{array}{l}\omega=2\,\pi\,\nu\;\rightarrow\;\nu=\dfrac{\omega}{2\,\pi} \\ \omega=50\,\pi\,\text{s}^{-1}\end{array}\right\}\rightarrow\;\nu=\dfrac{50\,\pi}{2\,\pi}=25\,\text{Hz} \\ \left.\begin{array}{l}k=\dfrac{2\,\pi}{\lambda}\;\rightarrow\;\lambda=\dfrac{2\,\pi}{k} \\ k=2\,\pi\,\text{m}^{-1}\end{array}\right\}\rightarrow\;\lambda=\dfrac{2\,\pi}{2\,\pi}\;\rightarrow\;\lambda=1\,\text{m} \end{array}\right\}\rightarrow\;v=1\cdot 25\;\rightarrow\;\boxed{v=25\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}}$$

c) A potencia que transporta a onda é a enerxía por unidade de tempo: $P=\dfrac{E}{t}$.

$$E=\frac{1}{2}\cdot K\cdot A^2=\frac{1}{2}\cdot m\cdot\omega^2\cdot A^2\xrightarrow[\omega=2\,\pi\,\nu]{m=\mu\cdot l}E=\frac{1}{2}\cdot\mu\cdot l\cdot(2\,\pi\,\nu)^2\cdot A^2=2\cdot\mu\cdot l\cdot\pi^2\cdot\nu^2\cdot A^2$$

$$P=\frac{E}{t}=\frac{2\cdot\mu\cdot l\cdot\pi^2\cdot\nu^2\cdot A^2}{t}=2\cdot\mu\cdot v\cdot\pi^2\cdot\nu^2\cdot A^2\;\rightarrow\;P=2\cdot 0{,}01\cdot 25\cdot\pi^2\cdot 25^2\cdot 0{,}2^2\;\rightarrow\;\boxed{P=123\,\text{W}}$$

21. Unha onda harmónica cuxa amplitude é 0,3 m recorre 300 m en 20 s. Calcula:

a) A lonxitude de onda.
b) Constrúe a ecuación de onda, tendo en conta que o seu avance é no sentido negativo do eixe X.
c) A máxima velocidade dun punto que vibra coa onda se a frecuencia é 2 Hz.

a) A lonxitude de onda determínase a partir da velocidade de propagación.

$$\left.\begin{array}{l} v=\dfrac{\lambda}{T}=\lambda\,\nu \;\rightarrow\; \lambda=\dfrac{v}{\nu} \\ v=\dfrac{x}{t} \;\rightarrow\; v=\dfrac{300}{20} \;\rightarrow\; v=15\,\mathrm{m\cdot s^{-1}} \\ \nu=2\,\mathrm{Hz} \end{array}\right\} \rightarrow \lambda=\frac{15}{2} \;\rightarrow\; \boxed{\lambda=7{,}5\,\mathrm{m}}$$

b) A ecuación de onda obtense ao substituír os datos na expresión xeral: $y(x,t)=A\,\mathrm{sen}\,(\omega\,t+k\,x)$.

$$\left.\begin{array}{l} y(x,t)=A\,\mathrm{sen}\,(\omega\,t+k\,x) \\ A=0{,}3\,\mathrm{m} \\ \omega=2\cdot\pi\cdot\nu \;\rightarrow\; \omega=4\,\pi\,\mathrm{Hz} \\ k=\dfrac{2\,\pi}{\lambda} \;\rightarrow\; k=\dfrac{2\,\pi}{7{,}5}=\dfrac{4\,\pi}{15}\,\mathrm{m^{-1}} \end{array}\right\} \rightarrow \boxed{y(x,t)=0{,}3\,\mathrm{sen}\cdot\left(4\,\pi\,t+\frac{4\,\pi}{15}\,x\right)\mathrm{m}}$$

c) A máxima velocidade pode determinarse a partir da expresión da velocidade, que se obtén ao derivar a ecuación de onda:

$$v=\frac{\mathrm{d}\,y(x,t)}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\left[0{,}3\cdot\mathrm{sen}\left(4\,\pi\,t+\dfrac{4\,\pi}{15}\,x\right)\right]}{\mathrm{d}t} \rightarrow v=0{,}3\cdot 4\cdot\pi\cdot\cos\left(4\,\pi\,t+\frac{4\,\pi}{15}\,x\right)$$

$$\left|v_{\text{máxima}}\right|=0{,}3\cdot 4\cdot\pi \;\rightarrow\; \boxed{\left|v_{\text{máxima}}\right|=1{,}2\,\pi\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}}$$

22. A función de onda dunha onda harmónica que se move nunha corda é $y(x,t)=0,03\,\text{sen}\left(2,2\,x-3,5\,t\right)$, onde as lonxitudes se expresan en metros e o tempo en segundos. Determina:

a) A lonxitude de onda e o período desta onda.

b) A velocidade de propagación.

c) A velocidade máxima de calquera segmento da onda.

a) Comparando a ecuación xeral dunha onda harmónica unidimensional que se propaga no eixe X e que a vibración ten lugar no eixe Y, utilizando a función seno, $y(x,t)=A\,\text{sen}\left(k\,x\pm\omega\,t\right)$, coa ecuación de onda dada: $y(x,t)=0,03\,\text{sen}\left(2,2\,x-3,5\,t\right)$, temos:

$$\left.\begin{array}{l} k=\dfrac{2\,\pi}{\lambda}\rightarrow\lambda=\dfrac{2\,\pi}{k} \\ k=2,2\text{ m}^{-1}\end{array}\right\}\rightarrow\lambda=\frac{2\,\pi}{2,2}\rightarrow\boxed{\lambda=2,9\text{ m}}$$

$$\left.\begin{array}{l} \omega=\dfrac{2\,\pi}{T}\rightarrow T=\dfrac{2\,\pi}{\omega} \\ \omega=3,5\text{ s}^{-1}\end{array}\right\}\rightarrow T=\frac{2\,\pi}{3,5}\rightarrow\boxed{T=1,8\text{ s}}$$

b) Velocidade de propagación:

$$\left.\begin{array}{l} v=\dfrac{x}{t}\rightarrow v=\dfrac{\lambda}{T} \\ \lambda=2,9\text{ m} \\ T=1,8\text{ s}\end{array}\right\}\rightarrow v=\frac{2,9}{1,8}\rightarrow\boxed{v=1,6\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}}$$

c) Velocidade máxima:

$$v=\frac{\text{d}\,y(x,t)}{\text{d}t}=\frac{\text{d}\left[0,03\,\text{sen}\left(2,2\,x-3,5\,t\right)\right]}{\text{d}t}\rightarrow v=-0,03\cdot3,5\cos\left(2,2\,x-3,5\,t\right)$$

$$\left|v_{\text{máxima}}\right|=0,03\cdot3,5\rightarrow\boxed{\left|v_{\text{máxima}}\right|=0,11\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}}$$

23. Un altofalante emite ondas sonoras esféricas cunha potencia de 200 W. Determina:

a) A enerxía emitida en media hora.

b) A intensidade sonora a 4 m do altofalante.

c) O nivel de intensidade sonora, en dB, a 4 m do altofalante.

Datos: $I_0 = 10^{-12}$ W·m^{-2}.

a) A enerxía emitida é:

$$\left.\begin{array}{l} P = \dfrac{E}{t} \rightarrow E = P \cdot t \\ P = 200\ \text{W} \\ t = 0{,}5\ \text{h} = 1800\ \text{s} \end{array}\right\} \rightarrow E = 200 \cdot 1800 \rightarrow \boxed{E = 3{,}6 \cdot 10^5\ \text{J}}$$

b) A intensidade sonora será:

$$\left.\begin{array}{l} I = \dfrac{P}{S} = \dfrac{P}{4\,\pi\, r^2} \\ P = 200\ \text{W} \\ r = 4\ \text{m} \end{array}\right\} \rightarrow I = \frac{200}{4 \cdot \pi \cdot 4^2} \rightarrow \boxed{I = 1{,}00\ \text{W} \cdot \text{m}^{-2}}$$

c) Tendo en conta a definición do nivel de intensidade sonora en dB:

$$S = 10 \cdot \log \frac{I}{I_0} \rightarrow S = 10 \cdot \log \frac{1{,}00}{10^{-12}} \rightarrow \boxed{S = 120\ \text{dB}}$$

24. O canto dun galo produce unha onda esférica de 1 mW de potencia.

a) Cal é o nivel de intensidade sonora a unha distancia de 10 m?

b) Outro galo canta, simultaneamente, cunha potencia de 2 mW, a unha distancia de 30 m do primeiro galo. Cal será a intensidade do son resultante no punto medio do segmento que une ambos galos?

c) Cal será o nivel de intensidade sonora resultante?

Datos: $I_0 = 10^{-12}$ W·m^{-2}.

a) O nivel de intensidade sonora será:

$$\left.\begin{array}{l} S = 10 \cdot \log \dfrac{I}{I_0} \\ \left.\begin{array}{l} I = \dfrac{P}{S} = \dfrac{P}{4\,\pi\,r^2} \\ P = 0{,}001\text{ W} \\ r = 10\text{ m} \end{array}\right\} \rightarrow I = \dfrac{0{,}001}{4 \cdot \pi \cdot 10^2} = 7{,}96 \cdot 10^{-7}\text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \end{array}\right\} \rightarrow S = 10 \cdot \log \frac{7{,}96 \cdot 10^{-7}}{10^{-12}} \rightarrow \boxed{S = 59\text{ dB}}$$

b) No punto medio, a intensidade sonora será a suma das intensidades do canto de cada un dos galos:

$$\left.\begin{array}{l} I = I_1 + I_2 \\ I_1 = \dfrac{P_1}{S_1} = \dfrac{0{,}001}{4 \cdot \pi \cdot 15^2} \\ I_1 = \dfrac{P_1}{S_1} = \dfrac{0{,}002}{4 \cdot \pi \cdot 15^2} \end{array}\right\} \rightarrow I = \frac{0{,}001}{4 \cdot \pi \cdot 15^2} + \frac{0{,}002}{4 \cdot \pi \cdot 15^2} \rightarrow \boxed{I = 1{,}06 \cdot 10^{-6}\text{ W} \cdot \text{m}^{-2}}$$

c) E o nivel de intensidade sonora resultante será:

$$S = 10 \cdot \log \frac{I}{I_0} \rightarrow S = 10 \cdot \log \frac{1{,}06 \cdot 10^{-6}}{10^{-12}} \rightarrow \boxed{S = 60\text{ dB}}$$

25. O vo 370 de MalaysiaAirlines que desapareceu o 8 de marzo de 2014 no Mar de China estaba sendo controlado dende a torre de control cun radar de 1000 MHz de frecuencia e 1 kW de potencia.

a) Calcula o número de fotóns por segundo que emitía o radar.

b) Calcula a intensidade das ondas do radar á distancia que estaba o avión cando se detectou por última vez, sabendo que dita distancia era de 200 km dende a posición do radar. Suponse ondas esféricas e non se ten en conta a absorción na atmosfera.

c) Un barco de rescate rexistrou sinais ultrasónicas procedentes do fondo do océano, que poderían ser da caixa negra do avión. Sábese que a caixa negra emite ondas acústicas de 37,5 kHz e 160 dB. Calcula a lonxitude de onda e a intensidade destes ultrasóns.

Datos: h = 6,63·10⁻³⁴ J·s; velocidade do son na auga = 1500 m·s⁻¹; I_0 = 10⁻¹² W·m⁻².

a) A enerxía dun fotón é:

$$E = h\nu \rightarrow E = 6{,}63 \cdot 10^{-34} \cdot 10^{9} \rightarrow E = 6{,}63 \cdot 10^{-25}\ \text{J}$$

Dado que a potencia é a relación entre enerxía e tempo:

$$\left.\begin{array}{l} P = \dfrac{n \cdot E_{\text{fotón}}}{t} \\ P = 1000\ \text{W} \\ E_{\text{fotón}} = 6{,}63 \cdot 10^{-25}\ \text{J} \\ t = 1\ \text{s} \end{array}\right\} \rightarrow 1000 = \frac{n \cdot 6{,}63 \cdot 10^{-25}}{1} \rightarrow \boxed{n = 1{,}51 \cdot 10^{27}\ \text{fotóns/s}}$$

b) A intensidade da onda é:

$$\left.\begin{array}{l} I = \dfrac{P}{S} = \dfrac{P}{4\,\pi\, r^{2}} \\ P = 1000\ \text{W} \\ r = 2 \cdot 10^{5}\ \text{m} \end{array}\right\} \rightarrow I = \frac{1000}{4 \cdot \pi \cdot \left(2 \cdot 10^{5}\right)^{2}} \rightarrow \boxed{I = 2 \cdot 10^{-9}\ \text{W} \cdot \text{m}^{-2}}$$

c) A lonxitude de onda será:

$$\left.\begin{array}{l} v = \lambda\,\nu \rightarrow \lambda = \dfrac{v}{\nu} \\ v = 1500\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1} \\ \nu = 37{,}5 \cdot 10^{3}\ \text{Hz} \end{array}\right\} \rightarrow \lambda = \frac{1500}{37{,}5 \cdot 10^{3}} \rightarrow \boxed{\lambda = 0{,}04\ \text{m}}$$

A intensidade sonora S dos ultrasóns pode obterse a partir de:

$$S = 10 \log \frac{I}{I_0} \rightarrow 160 = 10 \log \frac{I}{10^{-12}} \rightarrow \boxed{I = 10^{4}\ \text{W} \cdot \text{m}^{-2}}$$

26. Para determinar a profundidade dunha cova emítese unha onda sonora esférica de 20 W, escoitándose o eco ao cabo de 3 s. Supoñendo que a cova é suficientemente ampla para desprezar as reflexións nas paredes laterais e os fenómenos de absorción, determina:

a) A profundidade da cova.

b) A intensidade da onda sonora ao chegar ao fondo da cova.

c) O nivel de intensidade sonora nese momento.

Datos: velocidade do son = 340 m·s⁻¹.

a) A profundidade da cova determínase tendo en conta o movemento uniforme do son e que 3 s é o tempo que emprega a onda no camiño de ida e volta:

$$v = \frac{\text{distancia}}{t} \rightarrow \text{distancia} = v \cdot t \rightarrow \text{distancia} = 340 \cdot \frac{3}{2} \rightarrow \boxed{\text{distamcia} = 510\ \text{m}}$$

b) A intensidade é:

$$\left.\begin{array}{l} I = \dfrac{P}{S} = \dfrac{P}{4\,\pi\, r^2} \\ P = 20\ \text{W} \\ r = 510\ \text{m} \end{array}\right\} \rightarrow I = \frac{20}{4 \cdot \pi \cdot 510^2} \rightarrow \boxed{I = 6{,}12 \cdot 10^{-6}\ \text{W} \cdot \text{m}^{-2}}$$

c) O nivel de intensidade sonora S é:

$$S = 10 \log \frac{I}{I_0} \rightarrow S = 10 \log \frac{6{,}12 \cdot 10^{-6}}{10^{-12}} \rightarrow \boxed{S = 68\ \text{dB}}$$

27. Dous altofalantes emiten ondas sonoras con potencias P_A e P_B, sendo $P_B = 2\ P_A$. Nun punto P, situado a unha distancia de 5 m, equidistante de ambos altofalantes, o nivel de intensidade sonora é de 90 dB. Determina:

a) A intensidade sonora en P.

b) A potencia de cada un dos altofalantes.

a) O nivel de intensidade sonora nun punto Q, situado a 2 m de A e 8 m de B.

Dato: $I_0 = 10^{-12}$ W·m^{-2}.

a) Coñecendo o nivel de intensidade sonora en P, podemos determinar a intensidade:

$$S = 10 \cdot \log \frac{I}{I_0} \rightarrow 90 = 10 \cdot \log \frac{I}{10^{-12}} \rightarrow \boxed{I = 10^{-3}\ \text{W} \cdot \text{m}^{-2}}$$

b) A partir da relación entre intensidade e potencia:

$$\left.\begin{array}{l} I = \dfrac{P}{S} = \dfrac{P}{4\,\pi\,r^2} \\ I = 10^{-3}\ \text{W} \cdot \text{m}^2 \\ r = 5\ \text{m} \end{array}\right\} \rightarrow 10^{-3} = \frac{P}{4 \cdot \pi \cdot 5^2} \rightarrow P = 0{,}314\ \text{W}$$

$$\left.\begin{array}{l} P = P_A + P_B \\ P_B = 2\,P_A \\ P = 0{,}314\ \text{W} \end{array}\right\} \rightarrow 0{,}314 = 3\,P_A \rightarrow \left\{\begin{array}{l} \boxed{P_A = 0{,}105\ \text{W}} \\ \boxed{P_B = 0{,}209\ \text{W}} \end{array}\right.$$

c) No punto Q, determinamos a intensidade sonora debida a cada altofalante:

$$\left.\begin{array}{l} S = 10 \cdot \log \dfrac{I_A + I_B}{I_0} \\ I_A = \dfrac{P_A}{S_A} \rightarrow I_A = \dfrac{0{,}105}{4 \cdot \pi \cdot 2^2} \rightarrow I_A = 2{,}09 \cdot 10^{-3}\ \text{W} \cdot \text{m}^{-2} \\ I_B = \dfrac{P_B}{S_B} \rightarrow I_B = \dfrac{0{,}209}{4 \cdot \pi \cdot 8^2} \rightarrow I_B = 2{,}60 \cdot 10^{-4}\ \text{W} \cdot \text{m}^{-2} \\ I_0 = 10^{-12}\ \text{W} \cdot \text{m}^{-2} \end{array}\right\} \rightarrow S = 10 \cdot \log \frac{2{,}09 \cdot 10^{-3} + 2{,}60 \cdot 10^{-4}}{10^{-12}} \rightarrow \boxed{S = 93{,}7\ \text{dB}}$$

28. Dous altofalantes están situados á mesma altura e separados entre si unha distancia de 4,0 m. Ambos emiten un son puro de 200 Hz. No primeiro, F_1, seleccionouse unha potencia de 1,2 mW e no segundo, F_2, a potencia seleccionada é 1,8 mW. Sábese que vibran en fase.

a) Determine a intensidade do son nun punto do plano no que están os altofalantes situado a 4,0 m do primeiro altofalante e a 3,0 m do segundo.

b) Supoña agora que en ambos altofalantes selecciónase a mesma potencia, 1,0 mW, e o son puro que emiten é de 40 Hz Cal será o nivel de intensidade sonora no punto medio entre ambos altofalantes?

c) Empregando a curva isofónica adxunta, determine o nivel de sensación sonora no punto medio entre ambos altofalantes?

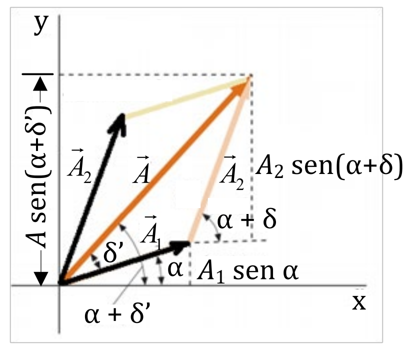
Datos: velocidade do son 340 m·s^{-1}; I_0 = 10^{-12} W·m^{-2}.

a) Por tratarse de ondas síncronas, pode utilizarse un diagrama de fasores para o cálculo da amplitude A resultante, aplicando o teorema do coseno.

$$A^2 = A_1{}^2 + A_2{}^2 + 2\,A_1\,A_2 \cos\delta$$

E como a intensidade da onda I é directamente proporcional ao cadrado da amplitude, $I \propto A^2$:

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1}\,\sqrt{I_2}\cos\delta$$



Considerando o desfase entre ambas ondas como: $\delta = k\cdot\Delta r$,

sendo k o número de onda: $k = \dfrac{2\,\pi}{\lambda}$.

Como a velocidade do son é: $v = \lambda\cdot\nu \;\rightarrow\; \lambda = \dfrac{v}{\nu}$

Entón:

$$k = \frac{2\,\pi}{\lambda} = \frac{2\,\pi}{v}\nu$$

Polo que:

$$\delta = \frac{2\,\pi\cdot\nu\cdot\Delta r}{v}$$

Considerando que se trata de ondas con envolvente esférica:

$$I_1 = \frac{P_1}{S_1} = \frac{P_1}{4\,\pi\,r_1^2};\; I_2 = \frac{P_2}{S_2} = \frac{P_2}{4\,\pi\,r_2^2}$$

Desta maneira, substituíndo na ecuación da intensidade e tomando a velocidade do son de 340 m/s, resulta:

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1}\,\sqrt{I_2}\cos\delta$$

$$I = \frac{P_1}{4\,\pi\,r_1^2} + \frac{P_2}{4\,\pi\,r_2^2} + 2\cdot\sqrt{\frac{P_1}{4\,\pi\,r_1^2}}\cdot\sqrt{\frac{P_2}{4\,\pi\,r_2^2}}\cdot\cos\left(\frac{2\,\pi\,\nu\,\Delta r}{v}\right)$$

$$I = \frac{1{,}2\cdot10^{-3}}{4\cdot\pi\cdot4^2} + \frac{1{,}8\cdot10^{-3}}{4\cdot\pi\cdot3^2} + 2\cdot\sqrt{\frac{1{,}2\cdot10^{-3}}{4\cdot\pi\cdot4^2}}\cdot\sqrt{\frac{1{,}8\cdot10^{-3}}{4\cdot\pi\cdot3^2}}\cdot\cos\left(\frac{2\cdot\pi\cdot200\cdot(4-3)}{340}\right)$$

$$I = 5{,}97\cdot10^{-6} + 1{,}59\cdot10^{-5} + 19{,}49\cdot10^{-6}\cdot(-0{,}850) \rightarrow \boxed{I = 5{,}3\cdot10^{-6}\ \mathrm{W\cdot m^{-2}}}$$

b) Dado que os altofalantes vibran en fase, as ondas chegan ao punto medio tamén en fase (a diferenza de camiños é 0) polo que a amplitude duplícase.

$$A^2 = A_1{}^2 + A_2{}^2 + 2\,A_1\,A_2\cos\delta \xrightarrow{\text{en fase}} A = A_1 + A_2$$

Como ambos emiten coa mesma potencia de 1,0 mW: $A_1 = A_2$

$$A^2 = (2\,A_1)^2 = 4\,A_1{}^2$$

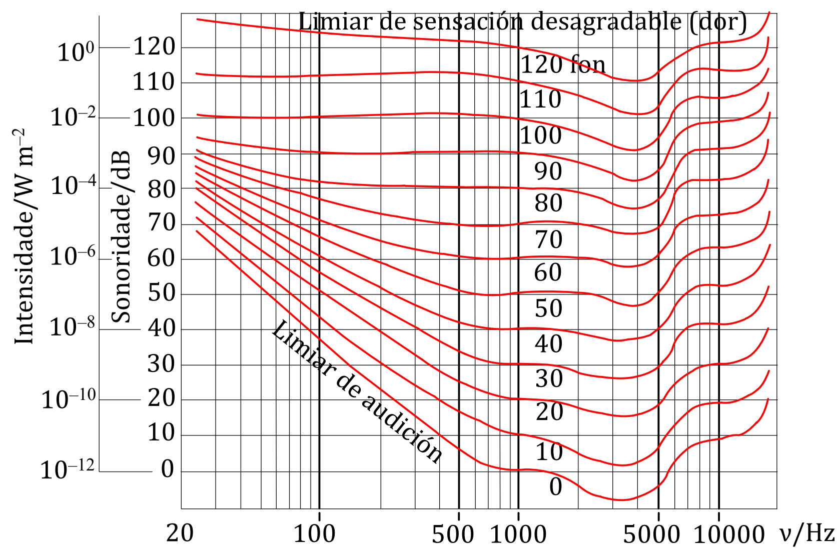
Como $I \propto A^2$, resulta: $I = 4\,I_1$

$$I_1 = I_2 = \frac{P}{4\,\pi\,r^2} \rightarrow I = 4 \cdot \frac{P}{4\,\pi\,r^2}$$

Para determinar o nivel de intensidade sonora, en dB:

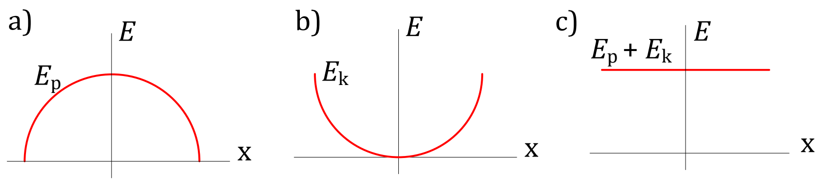
$$S = 10 \cdot \log\left(\frac{I}{I_0}\right) = 10 \cdot \log\left(\frac{4 \cdot \frac{P}{4\,\pi\,r^2}}{I_0}\right) = 10 \cdot \log\left(\frac{4 \cdot \frac{1,0 \cdot 10^{-3}}{4 \cdot \pi \cdot 2^2}}{10^{-12}}\right) \rightarrow \boxed{S = 79,00\ \text{dB}}$$

c) Para determinar o nivel de sensación sonora, en fonios, observamos as curvas fónicas. Tomando a abscisa de 40 Hz e ordenada 79 dB obtemos unha curva isofónica de $\boxed{\text{60 fonios}}$ de sensación sonora.



VIBRACIÓNS E ONDAS. CUESTIÓNS

1. Nun movemento harmónico simple, indica cal das seguintes gráficas se axusta á relación enerxía/elongación.



SOL.: **c**

A expresión da enerxía mecánica E_m dun oscilador harmónico de constante elástica k, que oscila cunha amplitude A, é: $E_m = \frac{1}{2} \cdot k \cdot A^2$. Vemos que E_m é constante para calquera valor da elongación, como corresponde a unha forza conservativa.

As expresións da enerxía potencial E_p e da enerxía cinética E_k, en función da elongación x, respectivamente, son: $E_p = \frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2$ e $E_k = \frac{1}{2} \cdot k \cdot \left(A^2 - x^2\right)$.

Caso a): Non é correcto. A enerxía potencial ten o valor máximo nos extremos da traxectoria, x = ± A, e o valor mínimo (nulo) no centro da traxectoria, $x = 0$. E, segundo a gráfica, nestas posicións a enerxía potencial é, respectivamente, mínima e máxima.

Caso b): Non é correcto. A enerxía cinética ten o valor máximo no centro de oscilación, $x = 0$, e o valor mínimo (nulo) nos extremos da traxectoria, $x = \pm A$. E, segundo a gráfica, nestas posicións a enerxía cinética é, respectivamente, mínima e máxima.

Caso c): É correcto. A enerxía mecánica dun oscilador harmónico é constante, independentemente do valor da elongación: $E_m = \frac{1}{2} \cdot k \cdot A^2$. Esta é a situación que aparece no gráfica do ítem c).

2. De dous resortes elásticos con idéntica constante cólgase a mesma masa. Un dos resortes ten dobre lonxitude que o outro, entón, o corpo vibrará:
a) Coa mesma frecuencia.
b) O de dobre lonxitude con frecuencia dobre.
a) O de dobre lonxitude coa metade da frecuencia.

SOL.: **b**

O período de vibración T dunha masa m colgada dun resorte elástico de constante k vén dado por:
$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$.

Se a masa e as constantes son iguais, o período de ambos e, polo tanto, a súa frecuencia serán iguais, ao non influír a lonxitude do resorte.

Pola mesma razón, a non influenza da lonxitude do resorte, as outras dúas opcións son falsas.

3. Cando un movemento ondulatorio se reflicte, a súa velocidade de propagación: a) aumenta; b) depende da superficie de reflexión; c) non varía.

SOL.: **c**

A reflexión é un fenómeno ondulatorio polo que as ondas modifican a dirección da velocidade de propagación ao chocar contra unha superficie. Polo tanto, non se produce cambio no módulo da súa velocidade de propagación, ao non cambiar o medio de propagación.

4. Se se cambian á vez o ton e a intensidade dun son procedente dunha trompeta, cales das seguintes magnitudes teñen que cambiar necesariamente?: a) frecuencia e lonxitude de onda; b) só a frecuencia; c) amplitude, frecuencia e lonxitude de onda.

SOL.: **c**

As calidades do son as que se refiren, intensidade e ton, están directamente relacionadas coa amplitude A (intensidade) e coa frecuencia f (ton). Por outra banda, frecuencia f e lonxitude de onda λ, para unha velocidade de propagación determinada, tamén están relacionadas entre si: $v = \lambda \cdot f$.

Por isto, unha modificación de ton e intensidade supoñen unha modificación de amplitude, frecuencia e lonxitude de onda.

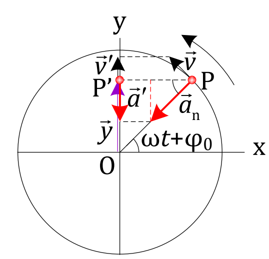
5. A enerxía que transporta unha onda é proporcional: a) á frecuencia; b) á amplitude; c) aos cadrados da frecuencia e da amplitude.

SOL.: **c**

Un punto material de masa m alcanzado por unha onda empeza a vibrar e adquire enerxía E, podendo ser cinética, E_k, e/ou potencial, E_p: $E = E_k + E_p = E_{k\text{ máxima}} = E_{p\text{ máxima}} = 2\,\pi^2\, m\, A^2 f^2$, sendo A a amplitude e f a frecuencia. Polo tanto, a enerxía que transporta unha onda é directamente proporcional aos cadrados da súa frecuencia e amplitude.

6. Un movemento harmónico sinxelo determinado é a proxección dun movemento circular uniforme sobre un diámetro da circunferencia. A aceleración centrípeta no movemento circular é: a) maior ou igual á aceleración no MHS; b) sempre menor; c) menor ou igual á aceleración no MHS.

SOL.: **a**



A aceleración $\vec{a}'$ do MHS é unha función sinusoidal do tempo: $\vec{a}' = -\omega^2\, y\, \vec{j}$, cuxo módulo é máximo no punto de elongación máxima, $y = A$, sendo: $a' = \omega^2 \cdot A$, e nula no centro de oscilación, $y = 0$, sendo: $a' = 0$.

A aceleración centrípeta do movemento circular uniforme correspondente, $a = \omega^2 \cdot r$, será igual á devandita aceleración do MHS cando $y = r = A$, e será sempre maior para valores $y < A$.

7. Unha onda sen rozamentos amortécese de tal xeito que a amplitude é proporcional á inversa da raíz cadrada da distancia á orixe. Isto débese a que é unha onda: a) esférica; b) cilíndrica; c) lineal.

SOL.: **b**

Tendo en conta que a intensidade I do movemento ondulatorio é a relación entre a potencia P (ou enerxía por unidade de tempo) e a superficie normal á dirección de propagación, teremos para ondas cilíndricas: $I = P/(2\,\pi\, r\, h)$.

A intensidade é proporcional á enerxía E e esta é directamente proporcional ao cadrado da amplitude A de oscilación ($E = ½\, k\, A^2$), resultando que I será directamente proporcional a A^2 e inversamente proporcional a r. Polo tanto, A será inversamente proporcional a $r^{1/2}$.

8. Escoitando un coro, atopamos nunha nota mantida que se producen altibaixos de sonoridade. Popularmente dise que é debido a que alguén "desentoa". Na realidade, o que pasa é que alguén:

a) Está dando unha frecuencia sonora diferente ao resto.

b) Está producindo unha intensidade diferente.

c) A composición das frecuencias que constitúen a súa voz nese momento é diferente á dos seus compañeiros.

SOL.: **a**

Unha das calidades do son, o ton, que nos permite distinguir os sons agudos dos graves, depende da súa frecuencia fundamental. Cando as frecuencias fundamentais das ondas que se compoñen son diferentes, a composición das ondas pasa por intervalos de tempo nas que se producen interferencias construtivas e outros nas que son destrutivas, interpretadas como altibaixos de sonoridade. Polo tanto "desentoar" supón modificar esta frecuencia fundamental.

9. A velocidade dunha onda:

a) Varía coa fase na que se atope o punto.

b) Varía coa distancia do punto á orixe.

c) Varía ao cambiar o medio de propagación.

SOL.: **c**

A velocidade dunha onda é o resultado do produto da lonxitude de onda pola frecuencia, e depende do medio no que se está a propagar a onda. Ao cambiar o medio de propagación producirase unha modificación da súa lonxitude de onda que implicará un cambio da velocidade da onda. A frecuencia non se modifica ao depender exclusivamente do foco emisor.

10. Na composición de dúas ondas luminosas das mesmas características prodúcense lugares onde non hai iluminación apreciable.

a) Isto é unha reflexión.

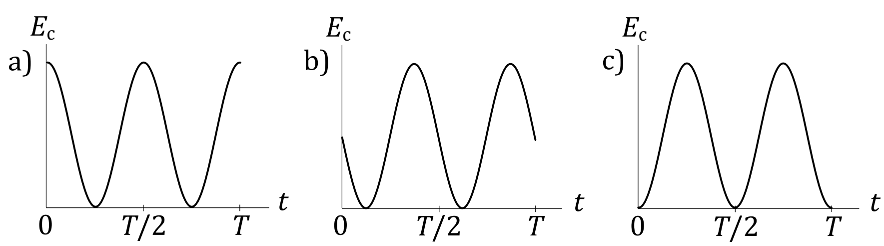
b) Prodúcese unha interferencia.

c) Non é certo, non se produce nunca.

SOL.: **b**

As interferencias prodúcense por superposición de dous movementos ondulatorios. Neste caso estamos a considerar o comportamento ondulatorio da luz. Cando dúas ondas luminosas producidas por focos distintos que se propagan polo mesmo medio se atopan nun mesmo punto, prodúcese o fenómeno das interferencias. Posto que a luz ten natureza electromagnética, as perturbacións mutuas preséntanse como reforzos ou diminucións dos campos eléctricos e magnéticos, equivalentes á composición construtiva ou destrutiva das mesmas.

11. As condicións iniciais dun oscilador harmónico son: tempo: $t = 0$, elongación: $x = 0$ e velocidade: $v > 0$. Que perfil representa correctamente a variación da E_c co tempo nun período?



SOL.: **a**

A enerxía cinética: $E_c = \frac{1}{2} \cdot k \cdot v^2 \xrightarrow[v=\omega\cdot\sqrt{A^2-x^2}]{k=m\cdot\omega^2} E_c = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \omega^2 \cdot \left(A^2 - x^2\right)$, ten o máximo valor cando $x = 0$ que, neste caso, coincide con $t = 0$, e para o tempo de un período a gráfica correcta é a).

12. A enerxía mecánica dun oscilador harmónico:
a) Duplícase cando se duplica a amplitude da oscilación.
b) Duplícase cando se duplica a frecuencia da oscilación.
c) Cuadriplícase cando se duplica a amplitude da oscilación.

SOL.: **c**

Como a enerxía mecánica é $E = (1/2)\, k\, A^2$, resulta que se duplicamos A se cuadriplica E.

13. Unha corda colga do alto dunha torre de xeito que o extremo superior é invisible e inaccesible, pero o extremo inferior si se ve. Como averiguarías a lonxitude da corda?
a) É imposible.
b) Medindo a amplitude da oscilación.
c) Medindo o período da oscilación.

SOL.: **c**

Considerando un comportamento de péndulo simple, se medimos o período T, $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, e coñecido g, poderemos calcular o valor l da lonxitude da corda.
(Nota: se a densidade lineal da corda non é desprezable, teriamos que aplicar a relación que nos da o período nun péndulo físico, o que tornaría máis complicada a solución polo cálculo de I en función da densidade e lonxitude).

14. Se no instante $t = 0$, un móbil que describe un MAS se atopa en $x = A/2$, dirixíndose cara ao centro de oscilación, a súa ecuación do movemento é:

a) $x = A \cdot \cos\left(\omega t + \pi/3\right)$ m

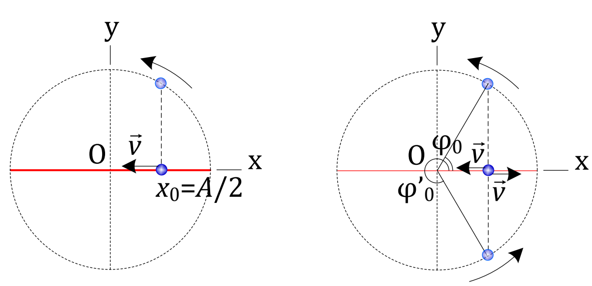
b) $x = A \cdot \text{sen}\left(\omega t + \pi/3\right)$ m

c) $x = A \cdot \cos\left(\omega t + 5\pi/3\right)$ m

SOL. **a**

A fase inicial φ_0 obtémola a partir das condicións iniciais:

$$x = A \cdot \cos\left(\omega t + \varphi_0\right) \xrightarrow{\text{para } t=0 \rightarrow x = A/2} A/2 = A \cdot \cos\left(0 + \varphi_0\right) \rightarrow \begin{cases} \varphi_0 = \pi/3 \text{ rad} \\ \varphi'_0 = 5\pi/3 \text{ rad} \end{cases}$$



Solo para a fase inicial $\varphi_0 = \pi/3$ rad, a velocidade é negativa.

A partir da expresión da velocidade comprobamos que a solución $\varphi_0 = \pi/3$ rad é a que cumpre que $v < 0$ no instante inicial $t = 0$.

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\vec{i} \xrightarrow{\vec{x} = A\cdot\cos(\omega t + \varphi_0)\vec{i}} \vec{v} = -A\cdot\omega\cdot\operatorname{sen}\left(\omega t + \varphi_0\right)\vec{i} \xrightarrow[\varphi_0 = \pi/3\,\mathrm{rad}]{t_0 = 0\,\mathrm{s}} \vec{v} < \vec{0}$$

15. A ecuación dunha onda transversal de amplitude 4 cm e frecuencia 20 Hz que se propaga no sentido negativo do eixo X cunha velocidade de 20 m·s⁻¹ é:

d) $y(x,t) = 4\cdot10^{-2}\cdot\cos\left[\pi\left(40\,t + 2\,x\right)\right]\mathrm{m}$

e) $y(x,t) = 4\cdot10^{-2}\cdot\cos\left[\pi\left(40\,t - 2\,x\right)\right]\mathrm{m}$

f) $y(x,t) = 4\cdot10^{-2}\cdot\cos\left[2\,\pi\left(40\,t + 2\,x\right)\right]\mathrm{m}$

SOL. **a**

A única resposta posible é a a), xa que cumpre que: ν = 20 Hz e v = 20 m·s⁻¹.

$$y(x,t) = 4\cdot10^{-2}\cdot\cos\left(40\,\pi\,t + 2\,\pi\,x\right)\mathrm{m}$$

Comparando coa ecuación xeral, $y(x,t) = A\cos\left(\omega\,t + k\,x\right)$:

$$\left.\begin{array}{l}\omega = 2\,\pi\,\nu \rightarrow \nu = \dfrac{\omega}{2\,\pi}\\ \omega = 40\,\pi\,\mathrm{s}^{-1}\end{array}\right\} \rightarrow \nu = \frac{40\,\pi}{2\,\pi} \rightarrow \nu = 20\,\mathrm{Hz}$$

$$\left.\begin{array}{l}v = \dfrac{x}{t} \rightarrow v = \dfrac{\lambda}{T} = \lambda\,\nu\\ \left.\begin{array}{l}k = \dfrac{2\,\pi}{\lambda} \rightarrow \lambda = \dfrac{2\,\pi}{k}\\ k = 2\,\pi\,\mathrm{m}^{-1}\end{array}\right\} \rightarrow \lambda = \dfrac{2\,\pi}{2\,\pi} = 1\,\mathrm{m}\\ \nu = 20\,\mathrm{Hz}\end{array}\right\} \rightarrow v = 1\cdot20 \rightarrow v = 20\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

16. Nun medio homoxéneo e isótropo, unha fonte sonora produce, a unha distancia *r*, un son de 40 dB. Se a intensidade do son se fai 100 veces maior, a nova sonoridade, á mesma distancia, será: a) 50 dB ; b) 60 dB ; c) 70 dB.

SOL. **b**

$$\left.\begin{array}{l}S' = 10\cdot\log\dfrac{100\,I}{I_0} \rightarrow S' = 10\cdot\left(\log 100 + \log\dfrac{I}{I_0}\right)\\ S = 10\cdot\log\dfrac{I}{I_0} = 40\,\mathrm{dB} \rightarrow \log\dfrac{I}{I_0} = \dfrac{40}{10}\end{array}\right\} \rightarrow S' = 10\cdot\left(\log 100 + \frac{40}{10}\right) \rightarrow S' = 60\,\mathrm{dB}$$

17. Nun medio homoxéneo e isótropo, unha fonte sonora produce, a unha distancia de 1 m, un son de 40 dB. A unha distancia de 10 m, a sonoridade será: a) 10 dB; b) 20 dB; c) 30 dB.

SOL. **b**

A sonoridade S diminúe coa distancia r ao foco emisor segundo a expresión:

$$\left.\begin{array}{l} S = 10 \cdot \log \dfrac{I}{I_0} \\ \dfrac{I}{I_0} = \dfrac{r_0^2}{r^2} \end{array}\right\} \rightarrow S = 10 \cdot \log \frac{r_0^2}{r^2}$$

$$\left.\begin{array}{l} S = 10 \cdot \log \dfrac{r_0^2}{1^2} \\ S' = 10 \cdot \log \dfrac{r_0^2}{10^2} \end{array}\right\} \rightarrow S - S' = 10 \cdot \left(\log \frac{r_0^2}{1^2} - \log \frac{r_0^2}{10^2} \right) = 10 \cdot \log \frac{\frac{r_0^2}{1^2}}{\frac{r_0^2}{10^2}} = 10 \cdot \log 100 = 20\ \text{dB}$$

$$40 - S' = 20 \rightarrow \text{S}' = 20\ \text{dB}$$

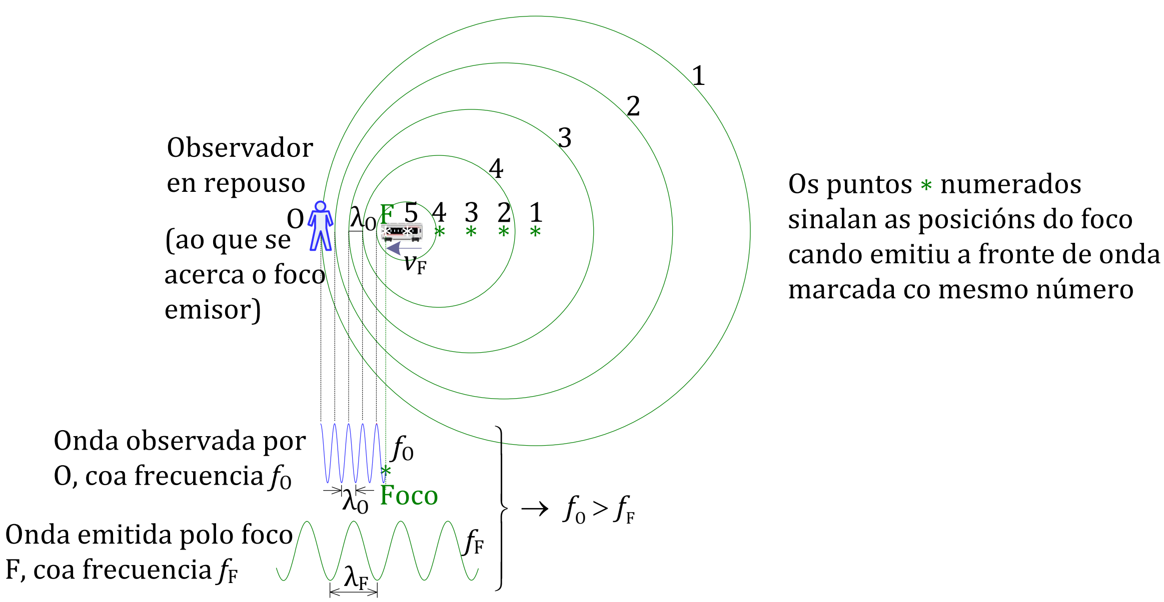
18. O chifre dunha locomotora emite un son de 435 Hz de frecuencia. Se a locomotora móvese achegándose a un observador en repouso, a frecuencia percibida polo observador é: a) 435 Hz; b) maior ca 435 Hz; c) menor ca 435 Hz.

SOL. **b**

Cando o foco emisor de ondas e e/ou o observador están en movemento relativo con respecto ao medio en que a onda se propaga, a frecuencia das ondas observadas é distinta da frecuencia das ondas emitidas. Este cambio de frecuencia recibe o nome de **efecto Doppler**.

A relación da frecuencia f_0, que aparece no efecto Doppler, percibida polo observador, que permanece en repouso, coa frecuencia f_F do foco emisor, que se acerca ao observador coa celeridade v_F, vén dada pola expresión: $\dfrac{f_0}{f_F} = \dfrac{v}{v - v_F}$, sendo v a rapidez da onda no medio en que se propaga.

Desta expresión vemos que $f_0 > f_F$.



19. Un ciclista desprázase en liña recta por unha estrada a velocidade constante. Nesta estrada hai dous coches parados, un diante, C_1, e outro detrás, C_2, do ciclista. Os coches teñen bucinas idénticas pero o ciclista sentirá que a frecuencia das bucinas é: a) maior a de C_1; b) a mesma; c) maior a de C_2.

SOL. **a**

Cando o foco emisor de ondas e e/ou o observador están en movemento relativo con respecto ao medio en que a onda se propaga, a frecuencia das ondas observadas é distinta da frecuencia das ondas emitidas. Este cambio de frecuencia recibe o nome de **efecto Doppler**. E a relación da frecuencia *f '* que aparece no efecto Doppler, percibida polo observador, coa frecuencia *f* do foco emisor, cando o observador se move con respecto ao foco, que permanece en repouso, vén dada polas expresións:

- Cando o observador se acerca ao foco emisor, que permanece en repouso: $\frac{f'_{\text{C1}}}{f_{\text{C1}}}=\frac{v_{\text{onda no medio}}+v_{\text{Observador}}}{v_{\text{onda no medio}}}$
- Cando o observador se afasta do foco emisor, que permanece en repouso: $\frac{f'_{\text{C2}}}{f_{\text{C2}}}=\frac{v_{\text{onda no medio}}-v_{\text{Observador}}}{v_{\text{onda no medio}}}$

De comparar as anteriores expresións resulta que a frecuencia observada polo ciclista do son emitido pola bucina do coche C_1, f'_{C1}, ao cal se acerca, é maior que a que observa do coche C_2, f'_{C2}, do cal de afasta.